

Vicente Bermejo (coord.)

Serie
EDUCADORES

6

CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICAS PARA APRENDER MEJOR

$x = (x-1) +$
 $y = (x+1)$

facebook.com/gabriel.garciagarcia.9256

EDITORIAL CCS



CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICAS PARA APRENDER MEJOR

Colección

CIUDAD DE LAS CIENCIAS

Serie EDUCADORES

1. *La numeración y las cuatro operaciones matemáticas.* J. A. Fernández Bravo.
2. *Secuenciación de contenidos matemáticos I.* J. A. Fernández Bravo / S. Atrio / F. Bandera
3. *Hablando de inventos...* A. Rodríguez / A. M^a Rodríguez / F. López / M. Fernández / M. Romera
4. *La naturaleza del conocimiento.* J. M^a López Sancho
5. *El número de dos cifras.* J. A. Fernández Bravo.
6. *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* V. Bermejo (coord.).
7. *Procesos y técnicas de trabajo en ciencias físicas.* J. Lahera / Ana Forteza.
8. *La fotografía en el conocimiento del medio geográfico.* M^a F. Álvarez.
9. *Números en color.* J. A. Fernández Bravo.
10. *1475 ítems de Física y Química.* N. Moreno Díaz de la Riva.
11. *Aprendiendo física básica en el laboratorio.* J. Lahera.
12. *Aprendiendo Ciencias de la Naturaleza en la cocina.* M. Caballero.
13. *Enseñar Historia del Arte.* Isabel de la Cruz Solís.
14. *Trabajar con mapas en Educación Secundaria.* M. Á. Sandoya.
15. *Competencia matemática en Primaria.* M. Marín (coord.).
16. *Cálculo mental en el aula.* M. Ortiz.
17. *Enseñar Ciencias Naturales en Educación Primaria.* M. Caballero.
18. *La resolución de problemas de geometría.* A. Nortes Checa / R. Nortes Martínez-Artero.
19. *Cálculo mental en el aula en el Primer Ciclo de Educación Primaria.* M. Ortiz.
20. *Problemas de exámenes de matemáticas y su didáctica.* A. Nortes Checa / R. Nortes Martínez-Artero.

Serie ALUMNOS

1. *Numerator.* J. A. Fernández Bravo. (J)
2. *Un pez chiquitín llamado Benjamín.* E. Díaz / M. Sánchez / N. Sanz. (C)
3. *Las nubes del país de la fantasía virtual.* J. A. Fernández Bravo. (C)
4. *La tortuga Botarruga.* J. A. Fernández Bravo. (C)
5. *El hipopótamo gracioso y fuerte.* J. A. Fernández Bravo. (C)
6. *Los animales que se escaparon del circo.* J. A. Fernández Bravo. (C)
7. *Tomatina del monte.* J. M. López Álvarez / M^a José Gómez Díaz. (C)
8. *La caja de números/1.* J. A. Fernández Bravo. (C)
9. *La caja de números/2.* J. A. Fernández Bravo. (C)
10. *Si te quieren, serás lo que eres.* J. A. Fernández Bravo. (C)
11. *Vamos a aprender Números.* P. Pinheiro.
12. *Vamos a aprender Letras.* P. Pinheiro.
13. *Vamos a aprender Formas.* P. Pinheiro.

NOTA: (J) = Juego, (C) = Cuento

Serie INGENIO

1. ***Problemas de ingenio para Primaria.*** Miquel Capó.
2. ***Problemas de ingenio para Primer Ciclo de Secundaria.*** Miquel Capó.
3. ***Problemas de ingenio para Bachillerato.*** Miquel Capó.
4. ***Problemas de ingenio para Segundo Ciclo de Secundaria.*** M. Capó.
5. ***Mate a las mates.*** M. Capó.
6. ***Puzles y matemáticas.*** M. Capó.
7. ***Del 1 al 9 cada número en su sitio.*** Miquel Capó.

Vicente Bermejo (Coord.)

CÓMO ENSEÑAR MATEMÁTICAS PARA APRENDER MEJOR

EDITORIAL CCS

Tercera edición: septiembre 2012

Página web de EDITORIAL CCS: www.editorialccs.com

© Autores Varios

© 2004. EDITORIAL CCS, Alcalá, 166 / 28028 MADRID

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Diseño de portada: Concepción Hernanz

ISBN (pdf): 978-84-9842-386-0

Fotocomposición: M&A, Becerril de la Sierra (Madrid)

Índice

Introducción

1. APRENDIENDO A CONTAR

V. BERMEJO, M. T. BERMEJO

1.1. Desarrollo numérico temprano

1.2. Subitización y conteo

1.3. Adquisición de la subitización

1.4. Adquisición del conteo

1.4.1. Correspondencia uno-a-uno

1.4.1.1. Errores típicos del conteo

1.4.2. La secuencia de numerales

1.4.3. Cardinal numérico

1.4.4. Principio de abstracción

1.4.5. Irrelevancia del orden

1.5. Bibliografía

2. ENSEÑANDO A CONTAR

V. BERMEJO, A. MARTÍN MANSILLA

2.1. Consideraciones didácticas generales

2.2. Espacios, tiempos y materiales para aprender

2.3. Enseñar a cuantificar

2.3.1. Procedimientos de subitización

2.3.2. El conteo

2.3.2.1. Correspondencia uno-a-uno

2.3.2.2. La secuencia convencional

2.3.2.3. Cardinal numérico

2.3.2.4. Abstracción e irrelevancia del orden

2.4. Representación gráfica de los números

2.5. Algunas reflexiones sobre evaluación

2.6. Bibliografía

3. APRENDIENDO A SUMAR Y RESTAR

V. BERMEJO, M. T. BERMEJO

3.1. ¿Saben sumar y restar los bebés?

3.2. Concepto de suma y resta

3.3. Problemas verbales

3.3.1. Problemas verbales de cambio

3.3.2. Problemas verbales de combinación

3.3.3. Problemas verbales de comparación

3.3.4. Problemas verbales de igualación

3.4. Dificultad de los problemas verbales

3.5. Estrategias infantiles

3.6. Errores típicos

3.7. Desarrollo de la capacidad de sumar y restar

3.8. Bibliografía

4. ENSEÑANDO A SUMAR Y RESTAR

V. BERMEJO, S. GARCÍA, M^a A. MARTÍN

- 4.1. Contenidos curriculares
- 4.2. Aspectos metodológicos
- 4.3. Enseñar a sumar y restar a través de problemas
 - 4.3.1. Cómo plantear y enseñar problemas
 - 4.3.2. Problemas rutinarios y no rutinarios
 - 4.3.3. Factores que intervienen en la resolución de problemas
 - 4.3.3.1. Comprensión
 - 4.3.3.2. Motivación
 - 4.3.3.3. Flexibilidad
 - 4.3.3.4. Interacción con el profesor y los compañeros
- 4.4. Enseñar estrategias
 - 4.4.1. Estrategias de la suma
 - 4.4.1.1. Modelado directo
 - 4.4.1.2. Conteo
 - 4.4.1.3. Hechos numéricos
 - 4.4.2. Estrategias de la resta
 - 4.4.2.1. Modelado directo
 - 4.4.2.2. Conteo
 - 4.4.2.3. Hechos numéricos
- 4.5. Bibliografía

5. APRENDIENDO A MULTIPLICAR Y DIVIDIR

ENRIQUE CASTRO, ENCARNACIÓN CASTRO, LUIS RICO

- 5.1. Multiplicación y división
- 5.2. Propiedades de la multiplicación
- 5.3. Situaciones asimétricas y simétricas
- 5.4. Desarrollo del concepto de multiplicación. Estrategias de los niños
- 5.5. Desarrollo del concepto de división. Estrategias
- 5.6. Tipos de cantidades
- 5.7. Categorías de problemas de multiplicar o dividir

- 5.8. Errores y dificultades de aprendizaje
- 5.9. El resto en una división entera
- 5.10. Bibliografía

6. ENSEÑANDO A MULTIPLICAR Y DIVIDIR

ENCARNACIÓN CASTRO, ENRIQUE CASTRO, LUIS RICO

- 6.1. La enseñanza de la multiplicación y la división
- 6.2. Consideraciones de tipo curricular
- 6.3. Sentido numérico
- 6.4. Representaciones y modelos
- 6.5. Recursos
- 6.6. Los conceptos de multiplicación y división en la enseñanza
- 6.7. Hechos numéricos básicos de la multiplicación y la división
- 6.8. Enseñanza del cálculo mental
- 6.9. Enseñanza del cálculo escrito
- 6.10. Estimación y cálculo aproximado
- 6.11. Problemas de multiplicar y dividir
- 6.12. Modelización de situaciones reales
- 6.13. Dificultades
- 6.14. Evaluación del aprendizaje de la multiplicación y la división
- 6.15. Bibliografía

7. APRENDIENDO FRACCIONES

J. M. SERRANO

- 7.1. Introducción
 - 7.1.1. Conocimiento declarativo o conceptual
 - 7.1.2. Conocimiento procedimental
 - 7.1.3. Las relaciones entre conocimiento declarativo y procedimental
 - 7.1.4. Los esquemas operatorios
- 7.2. El aprendizaje de los números racionales
 - 7.2.1. Primeras ideas sobre el número racional
 - 7.2.2. Del conocimiento informal al conocimiento formal

7.2.3. Influencia del contexto

7.2.4. Influencia del conocimiento declarativo y procedimental en la comprensión del número racional

7.2.5. La interconexión entre significado y función del aprendizaje de los números racionales

7.3. Bibliografía

8. ENSEÑANDO FRACCIONES

ANDRÉS NORTES CHECA

8.1. Introducción

8.2. Fracciones

8.3. Fracciones equivalentes

8.4. Suma de fracciones

8.5. Resta de fracciones

8.6. Producto de fracciones

8.7. Propiedades de la suma y del producto

8.8. División de fracciones

8.9. Fracciones decimales. Números decimales. Porcentajes

8.10. Operaciones con decimales exactos

8.11. Paso de número decimal a fracción. Operaciones

8.12. Juegos, ejercicios y problemas propuestos

8.13. Bibliografía

8.14. Solucionario

9. LOS ALGORITMOS

V. BERMEJO, E. VELA, SONIA BETANCOURT

9.1. Introducción

9.2. Definición de algoritmo

9.3. Evaluación de los algoritmos inventados

9.4. Algoritmos alternativos para las cuatro operaciones básicas

9.4.1. La suma

9.4.2. La resta

9.4.3. La multiplicación

9.4.4. La división

9.5. Errores en los algoritmos

9.6. Enseñanza-aprendizaje del algoritmo tradicional

9.7. Bibliografía

10. DIFICULTADES DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS

M. BLANCO, V. BERMEJO

10.1. Introducción

10.2. Dificultades de aprendizaje

10.2.1. Dificultades de aprendizaje en matemáticas

10.2.1.1. Tipología clásica

10.2.1.2. Propuesta actual

10.2.2. Déficits asociados

10.2.2.1. Dificultades de lenguaje escrito

10.2.2.2. Dificultades de aprendizaje no verbal

10.2.2.3. Dificultades en funciones ejecutivas

10.3. Intervención educativa

10.3.1. Ideas básicas sobre el apoyo

10.3.2. Estrategias de intervención

10.3.2.1. Partir de la matemática informal y de lo que conoce el niño

10.3.2.2. Uso de lo manipulativo y concreto

10.3.2.3. Aprendizaje cooperativo

10.3.2.4. Ritmo de aprendizaje: práctica intensiva versus compensación

10.3.2.5. Adaptarse a los puntos fuertes y débiles de los alumnos

10.3.2.6. Motivar

10.3.2.7. Autorregulación y autoestima

10.4. Evaluación y coordinación entre todos los miembros del sistema educativo

10.5. Bibliografía

11. EL PEIM: UN PROGRAMA DE INTERVENCIÓN

V. BERMEJO

11.1. Introducción

11.2. Los pilares constructivistas del programa

11.2.1. Los alumnos construyen sus propios conocimientos

11.2.2. El docente guía y apoya la construcción del conocimiento por parte del alumno

11.2.3. La comprensión y solución de problemas constituye el centro de la instrucción

11.2.4. El desarrollo de los contenidos específicos es un buen indicador para secuenciar los objetivos instruccionales

11.3. Descripción del PEIM

11.3.1. Los alumnos: Educación personalizada

11.3.2. El profesor: Formación psicopedagógica y específica de los contenidos

11.3.3. Los contenidos: Su selección y secuenciación

11.3.4. El contexto del aula: Dinámica constructivista

11.4. Aplicaciones del PEIM

11.5. Bibliografía

Introducción

El alto fracaso escolar en España es preocupante y socialmente inaceptable. El estudio comparativo realizado por Eurostat (Oficina Estadística de la Unión Europea) en el año 2001 y publicado en el año 2002, revela que España es el segundo país con mayor índice de fracaso escolar en la Unión Europea, después de Portugal. Pero esta pésima posición de nuestros escolares en el *ranking* establecido en la UE empeora manifiestamente en el área de las matemáticas. Desde la prensa española, que recoge inquietantes titulares como: «**La mayoría de los alumnos de selectividad suspendió las matemáticas**», refiriéndose a las pruebas de junio de 2003, hasta las distintas evaluaciones realizadas, tanto nacionales como internacionales, insisten machaconamente en las altas cotas de fracaso escolar en matemáticas de los alumnos españoles.

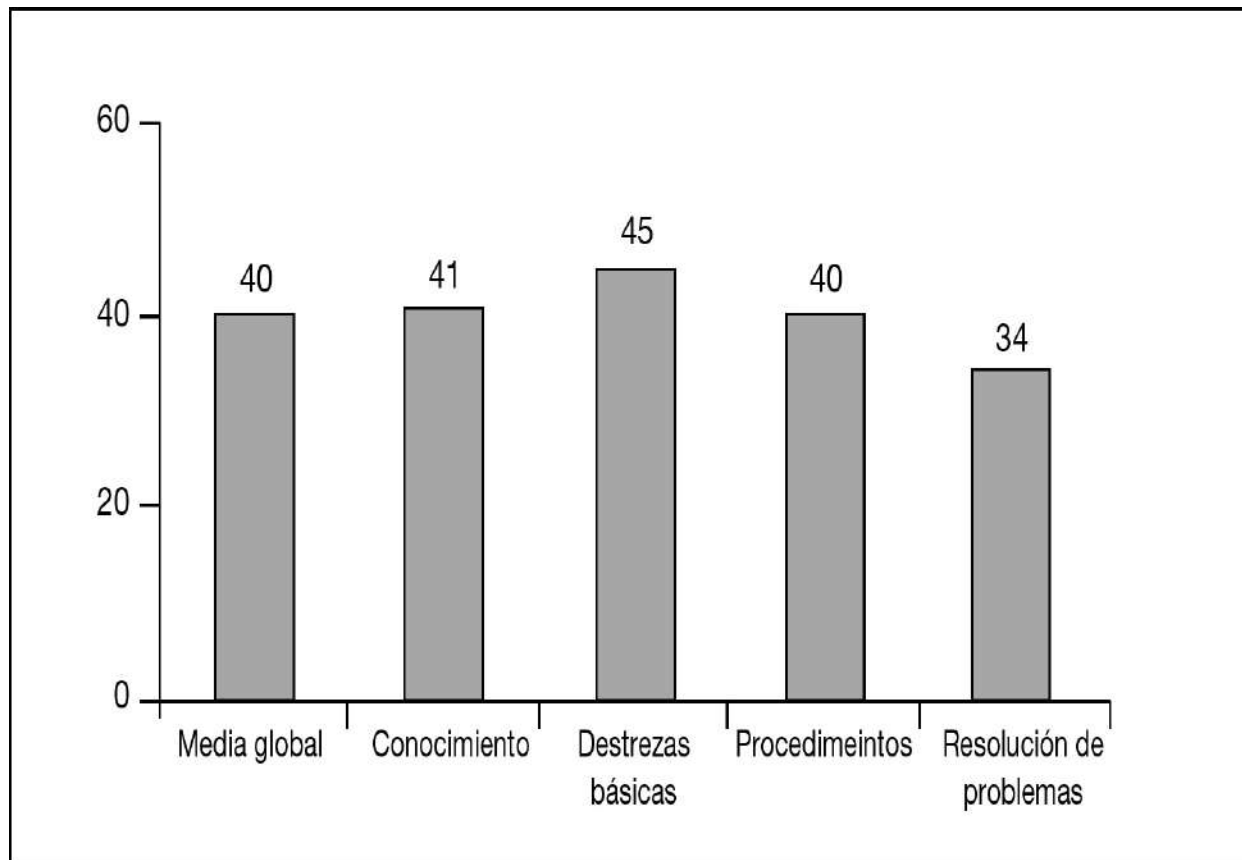
Las cuatro últimas evaluaciones realizadas por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación) en 1995, 1997, 1999 y 2000 muestran en general que el 50 por ciento aproximadamente de nuestros escolares no llegan a alcanzar la puntuación media de suficiente en matemáticas. Por ejemplo, en la evaluación realizada en el año 2000 al final de la ESO (16 años), los resultados en matemáticas son francamente contundentes (INCE, 2001). Mientras que en ciencias naturales los alumnos alcanzan una media

de 54% de aciertos, en ciencias sociales, geografía e historia un 60% y en lengua castellana y literatura un 64%, en matemáticas sólo obtienen una media de 40% de aciertos. Si además desglosamos esta media global, como se hace en INCE (2000), en los distintos tipos de operación cognitiva, encontramos que en la «resolución de problemas» el porcentaje resulta aún más negativo: los alumnos sólo llegan a alcanzar un 34% de aciertos (ver Fig. nº 1).

Pero esta situación se repite, o incluso llega a ser más dramática, en los estudios internacionales comparativos. Así, por ejemplo, en el TIMSS (3ª Evaluación Internacional en Matemáticas y Ciencias), nuestros alumnos no solamente no llegan a alcanzar globalmente la puntuación media, sino que además quedan situados en los últimos lugares del *ranking* establecido, de modo que casi todos los países de nuestro entorno, y otros de nivel socioeconómico inferior al nuestro, están situados por delante de España.

FIGURA 1

**PORCENTAJES MEDIOS DE ACIERTOS EN MATEMÁTICAS
SEGÚN EL TIPO DE OPERACIÓN COGNITIVA**



El papel de los estudiantes preuniversitarios españoles en las Olimpiadas Internacionales en Matemáticas es igualmente desastroso. La situación se repite una vez más en la 43 Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO 43) celebrada en Glasgow en 2002. Asisten 84 países y unos 500 participantes. Se concedieron 39 medallas de oro y 73 de plata, pero ninguna de ellas vino para España. Sólo una medalla de bronce, de las 119 concedidas, fue conseguida por un español. La puntuación total del equipo español fue de 44 puntos, mientras que China, que alcanzó el primer puesto del *ranking* mundial, obtuvo 212 puntos.

Finalmente, 6.214 estudiantes españoles de 15 años han tomado parte en el estudio *Pisa* (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos) llevado a cabo por la OCDE en 32 países durante el mes de mayo de 2000. Los resultados, que se publican en diciembre de 2001, señalan que los escolares españoles se encuentran por debajo de la media de la OCDE en lectura y cultura científica, pero sobre todo la media de los alumnos españoles es desastrosamente baja en matemáticas. Una vez más, países de

nivel socioeconómico inferior o similar a España, como por ejemplo Corea, Finlandia, Austria, Bélgica, Francia, Irlanda, Rep. Checa, Hungría, etc., se sitúan por encima de la media española.

A pesar de estos resultados, es cuanto menos sorprendente que esta lamentable situación de la educación matemática en nuestro país no haya tenido, o apenas, reacciones constructivas en los distintos estamentos responsables de la educación de nuestros escolares. Aunque las soluciones no son fáciles, pienso que sólo un trabajo y una colaboración interdisciplinar sin exclusiones puede llevarnos a ofrecer a nuestros estudiantes la educación matemática que se merecen.

Este libro pretende aportar su granito de arena en este reto difícil y complejo de mejorar la educación matemática en nuestro país. Con un talante claramente interdisciplinar se ofrecen propuestas desde distintos puntos de vista: del profesor, del investigador, del matemático, del psicólogo educativo, etc. La idea central que recorre y estructura toda la obra es la siguiente: **el protagonista del aula es el niño aprendiendo**. Esta afirmación, que puede parecer simplista a primera vista, supone toda una revolución o cambio en la manera de enfocar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En concreto, supone cambios tanto en el rol del alumno, el rol del profesor y la dinámica de la clase, entre otras variables.

En cuanto a lo primero, parece obvio que el centro de la clase es el niño aprendiendo, pero aprendiendo unos contenidos concretos: contar, sumar, solucionar un problema, etc.; de modo que no basta, aunque es útil, conocer el desarrollo general del niño (la teoría piagetiana, por ejemplo) o las teorías generales del aprendizaje. Lo que realmente importa, desde una perspectiva pragmática y de optimización, es conocer el desarrollo matemático específico infantil, de modo que puedan seguirse los pasos que recorre el niño para pasar de su competencia matemática actual a la competencia que se desea conseguir. En otras palabras, la eficiencia educativa será mayor si se conoce el proceso de aprendizaje que sigue el niño en la adquisición de los contenidos concretos que se imparten en el aula, al menos de los contenidos fundamentales.

En segundo lugar, la función del profesor cambia igualmente con respecto a su rol tradicional. Para empezar cede el protagonismo del aula a favor del alumno, supeditando su labor de facilitación y apoyo al aprendizaje

del niño. Pero en consonancia con el párrafo anterior, su formación requiere un conocimiento exhaustivo del aprendizaje de los contenidos matemáticos concretos que se imparten en el aula. Sólo así estará capacitado para ejercer su difícil labor de evaluación, diagnóstico e intervención que continuadamente se lleva a cabo en el aula. Aquí suelen aparecer las lagunas más notorias en la formación del profesorado, de modo que es bueno recordar las palabras de Rousseau dirigidas a los docentes y recogidas en el prólogo de su *Emilio*: «Comenzad por estudiar a vuestros alumnos porque seguro que no los conocéis».

Finalmente, la dinámica de la clase se orienta a favorecer la construcción del conocimiento por parte del alumno, siendo especialmente relevante la actitud activa, autónoma y creativa del niño, así como el trabajo cooperativo, el diálogo e interacción entre todos los actores de la clase: profesor-alumno-otros alumnos.

Partiendo, pues, de la idea de que una buena instrucción tiene en cuenta el proceso de aprendizaje infantil, esta obra plantea primero cómo aprende el alumno unos contenidos específicos, para ocuparse después de cómo enseñarlos. Así, los [capítulos 1 y 2](#) se ocupan sucesivamente del aprendizaje y de la enseñanza del conteo, insistiendo en la relevancia de esta habilidad en el desarrollo matemático posterior, así como en la complejidad de la misma: el niño suele necesitar unos tres años para aprender a contar correctamente. En los [capítulos 3 y 4](#) se estudian la suma y la resta desde esa doble perspectiva, resaltando la precocidad de estas operaciones en el desarrollo infantil (aparecen incluso antes del 2º Ciclo de Educación Infantil), la dificultad que suelen tener los alumnos en la resolución de los problemas verbales, y se ofrecen vías didácticas que facilitan su aprendizaje.

En los capítulos siguientes se analiza cómo aprende el niño a multiplicar y dividir ([cap. 5](#)), proponiendo procedimientos didácticos eficaces que favorecen la comprensión de estas operaciones ([cap. 6](#)), incluso en EI si se proponen situaciones concretas familiares. El aprendizaje y enseñanza de las fracciones se recoge sucesivamente en los [capítulos 7 y 8](#), facilitando la dificultad de la comprensión y operacionalidad con fracciones mediante la propuesta de un conjunto de situaciones prácticas.

El aprendizaje y enseñanza de los algoritmos merece un trato especial ([cap. 9](#)), debido a la dificultad que presentan los escolares en su uso y

comprensión. Los diferentes algoritmos alternativos inventados por los niños preparan el camino para llegar a la máxima abstracción que requieren los algoritmos tradicionales, que sólo deben enseñarse al final del proceso adquisitivo de cada operación. El [capítulo 10](#) concreta muchas de las ideas propuestas a lo largo de los capítulos anteriores para el caso de alumnos con dificultades de aprendizaje en matemáticas. Dada la especificidad de estos alumnos, se ofrece un conjunto de estrategias de intervención especialmente eficaces para el apoyo y facilitación del aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, en el [capítulo 11](#) se describe con brevedad el PEIM o Programa Evolutivo Instruccional para Matemáticas, que persigue la mejora del rendimiento matemático de los escolares. Basado en el enfoque constructivista sociocognitivo, sostiene que interviniendo adecuadamente sobre los cuatro pilares que lo fundamentan (alumnos, profesor, contenidos y contexto del aula), mejora significativamente el rendimiento matemático de los escolares, tal como muestran los datos empíricos obtenidos en la aplicación de este programa.

Esta obra va dirigida a todos aquellos que de algún modo participan o van a participar, directa o indirectamente, en la educación matemática de los niños: padres, orientadores, tutores, alumnos de educación y psicología educativa, etc., pero especialmente ha sido concebida para los profesores de Educación Infantil y Enseñanza Primaria. Pienso que su lectura puede ofrecerles una visión diferente de cómo llevar a cabo su quehacer cotidiano en el aula de matemáticas de una manera eficaz que motive al alumno, cambie sus actitudes ante las matemáticas, facilite su comprensión y mejore, en definitiva, la educación matemática de nuestros escolares.

Vicente Bermejo

1

Aprendiendo a contar

V. Bermejo • M. T. Bermejo

1.1. DESARROLLO NUMÉRICO TEMPRANO

Algunos animales, chimpancés y palomas entre otros, poseen ciertas capacidades numéricas, como, por ejemplo, la discriminación de pequeñas cantidades. En los humanos, la competencia numérica parece estar presente desde los primeros meses después del nacimiento. Así, los bebés pueden determinar los objetos de un conjunto, cuando éste no es superior a 3 objetos. Igualmente son capaces de emparejar el número de objetos que están viendo con la cantidad de sonidos que oyen. Sin embargo, no está suficientemente probado que estos bebés sean capaces de sumar y restar, como suponía Wynn. Hacia el año aproximadamente, los niños son capaces de relacionar conjuntos pequeños (hasta 4 elementos), determinando si son iguales o no, pero hay que esperar unos dos meses más (14 meses) para que puedan también determinar que un conjunto es mayor o menor que otro. Por tanto, en torno a los 14 meses, los niños serían capaces de representar los números y de operar mentalmente con ellos, antes de lo que había supuesto Piaget.

La competencia aritmética se inicia también muy pronto. En torno a los dos años los niños empiezan a comprender los efectos de la transformación de un conjunto, según que se le añada o reste un elemento, de modo que saben que añadir implica más objetos, mientras que restar objetos conlleva a conjuntos más pequeños. Pero incluso estos niños llegan a determinar con precisión el número de elementos resultante de la suma o resta de un objeto cuando se manejan conjuntos no superiores a 3 unidades. Más en concreto, el niño de 18 meses es capaz de resolver sumas y restas de objetos cuando se trata de $1 + 1$ o $2 - 1$; los niños de dos años incluso pueden resolver situaciones de resta cuando el minuendo tiene un máximo de 3 objetos, mientras que a los 30 meses resuelven ambos tipos de situaciones (suma y resta) si los conjuntos son de 3 o menos elementos.

El primer uso que suelen hacer los niños con los numerales no es para contar, sino más bien para indicar el cardinal de conjuntos pequeños. Así, hacia los dos años, o incluso antes, los niños suelen utilizar el «dos», usando también el «uno» y el «tres» meses más tarde ante pequeños conjuntos. De este modo, el niño indica con sus dedos o mediante el numeral los años que tiene, o señala los objetos que hay dentro de un círculo o recuadro mediante un numeral ([Fig. 1.1](#)).

FIGURA 1.1



En estos momentos, el niño no sabe todavía contar. Pero poco después aparecerá el «cuatro» en el repertorio numérico del niño y empieza a contar. Son los primeros instrumentos matemáticos que el contexto sociocultural ofrece al niño.

1.2. SUBITIZACIÓN Y CONTEO

Subitización y conteo son dos procedimientos que empleamos y emplean los niños para determinar cuántos objetos hay en un conjunto. El término anglófono «*subitizing*» ha sido utilizado de modos diferentes, pero en general podemos definirlo como el proceso mediante el cual aprehendemos súbitamente la cantidad de objetos que hay en un conjunto, generalmente, pequeño (no más de 5 o 6 objetos), emitiendo al mismo tiempo un numeral que indica los objetos del conjunto. Igualmente sigue siendo polémica la aparición de la subitización y del conteo en el desarrollo del niño. Aunque algunos autores defienden que el conteo es la base que precede y en la que se fundamenta el desarrollo numérico posterior, sin embargo, pensamos que la subitización aparece antes que la habilidad de contar en el desarrollo del niño. Efectivamente, cuando los niños aprenden los primeros numerales no lo hacen, o no suelen hacerlo para contar, sino más bien, para indicar cuántos objetos hay en un conjunto, es decir, para determinar el cardinal numérico de un conjunto. Así aprenden el numeral «2» para indicar los años que tienen, o el número de caramelos que hay en la palma de la mano, o el número de muñecos que hay delante de él, o los gatitos que hay en la [Figura 1.1](#).

Una vez aprendido el numeral con su significado cuantitativo, el niño lo utilizará para responder a la pregunta «cuántos objetos hay» o «cuántos hay» en un conjunto. Y al proceso que sigue el niño para determinar que hay «2» elementos lo llamamos subitización, como hemos dicho. Pero en este momento evolutivo los niños aún no saben contar, o en todo caso no es necesario que sepan contar para determinar el cardinal numérico de conjuntos pequeños (de 1 a 3 elementos). Curiosamente, tres es también el máximo de objetos que los bebés pueden discriminar cuantitativamente, como hemos visto. Por tanto, la subitización tiene primacía evolutiva sobre

el conteo, ya que antes de saber contar los niños la utilizan para cuantificar conjuntos pequeños, y más tarde, cuando ya son capaces de usar subitización y conteo, prefieren utilizar la primera para determinar los objetos que hay en conjuntos pequeños.

Una vez adquiridos los primeros numerales y su significado cuantitativo, es decir, los primeros números cardinales, se inicia el aprendizaje del conteo propiamente dicho: asignar los numerales en secuencia a cada uno de los elementos de un conjunto, formando correspondencias biunívocas, de modo que si el conteo es correcto y convencional el último numeral utilizado indica los elementos del conjunto contado. Desde este punto de vista, la génesis del conteo dependería de la subitización, de modo que ésta daría sentido al conteo. Efectivamente, cuando el niño cuenta, por ejemplo un conjunto de tres elementos, se da cuenta en un momento dado de que el último numeral empleado (3 en el ejemplo) indica precisamente el número de elementos que hay en el conjunto y que el niño determina o determinó anteriormente mediante subitización (ver [Fig. 1.2](#)).

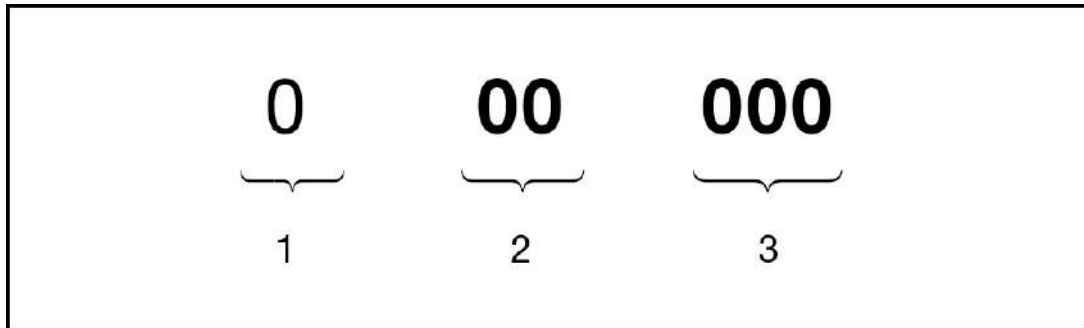
FIGURA 1.2

CARDINAL NUMÉRICO		
0	0	0
1	2	<u>3</u>

La subitización da también sentido cuantitativo a los numerales y por tanto al conteo. Así, cuando el niño cuenta 1, 2, 3, etc., no serían sólo palabras aprendidas de memoria, sin más, sino que tendrían un significado cuantitativo (ver [Fig. 1.3](#)).

FIGURA 1.3

SIGNIFICADO CARDINAL DE LOS NÚMEROS



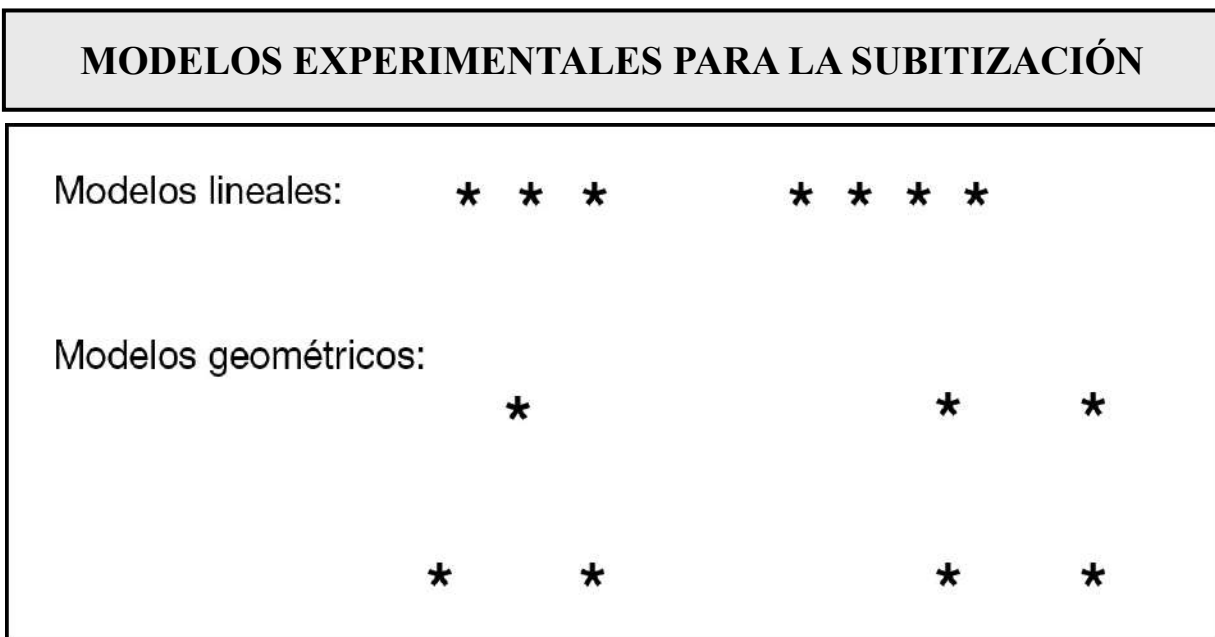
El conteo parece una habilidad simple y fácil desde el punto de vista adulto; sin embargo, exige un gran esfuerzo a los niños para su completa adquisición. Prueba de ello es el hecho de que en general los niños necesitan dos o tres años para contar correctamente.

1.3. ADQUISICIÓN DE LA SUBITIZACIÓN

Algunos autores sostienen que al principio la subitización, y no el conteo, juega un papel importante en el desarrollo numérico (Starkey y Cooper, 1995), ya que intervendría además en la adquisición de los primeros cardinales. Los niños suelen presentar dificultades similares en la adquisición de la subitización de conjuntos con 1, 2 y 3 objetos; sin embargo, resulta especialmente difícil la subitización de conjuntos de 4 elementos. Por ejemplo, en algunos experimentos se ha observado que niños de 4 y 5 años subitizan mejor conjuntos de tres elementos que de cuatro (con diferencias estadísticamente significativas). Igualmente, hay también diferencias importantes en el comportamiento de estos niños según que los modelos presentados sean hileras de puntos o figuras de triángulos o cuadrados formados por puntos, de modo que la subitización se facilita usando configuraciones (ver [Fig. 1.4](#)). Cuando se trata de 3 elementos, las diferencias entre modelos lineales o geométricos son menos significativas que cuando se utilizan cuatro elementos.

En general, los experimentos muestran que los niños de dos años pueden determinar el número de elementos de conjuntos de 1 a 3 objetos con exactitud mediante subitización. Los niños de tres años y medio lo hacen igualmente con conjuntos de 1 a 4 elementos y, finalmente, entre cuatro y cinco años los niños subitizan sin problemas conjuntos de 1 a 5 elementos. No obstante, hay que señalar que aquí también existen diferencias interindividuales, de modo que puede haber niños que muestren competencias más bajas o más altas de las que acabamos de indicar. En cambio, no se han encontrado diferencias entre niños y niñas (ver cómo enseñar la subitización en 2.3.1).

FIGURA 1.4



1.4. ADQUISICIÓN DEL CONTEO

Para algunos autores el niño aprende primero a contar de memoria o mediante imitación, práctica y refuerzo, antes de comprender los principios básicos del conteo (teoría de las habilidades primero). Otros, en cambio, defienden que los principios son innatos y guiarían el desarrollo de los procedimientos propios de la habilidad de contar (teoría de los principios

primero), de modo que la comprensión sería anterior a la ejecución correcta del conteo. Veremos después estos principios. Una tercera posición, intermedia entre ambas teorías, es la teoría del desarrollo mutuo, que nosotros compartimos. Según esta teoría, el niño poseería desde el nacimiento unas predisposiciones generales que servirían de base para el desarrollo posterior numérico y, por tanto, del conteo, de tal modo que comprensión y procedimientos se irían desarrollando más o menos paralelamente y en constante interacción a lo largo de la infancia.

Siguiendo la teoría de «los principios primero», Gelman y Gallistel (1978) proponen un modelo de contar, ya clásico, formado por cinco principios o componentes, de modo que los niños llegarían a contar perfectamente cuando sean capaces de integrar esos principios:

- 1º) Principio de correspondencia uno-a-uno.
- 2º) Principio de orden estable.
- 3º) Principio de cardinalidad o cardinal numérico.
- 4º) Principio de abstracción.
- 5º) Principio de orden irrelevante.

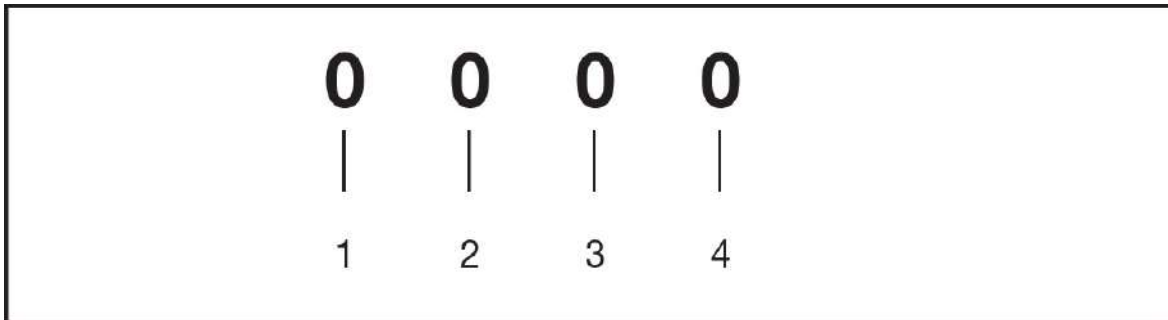
Los tres primeros principios se refieren a cómo contar, mientras que los dos restantes indican qué se puede contar y cómo contar los objetos de un conjunto. Partiendo de estos principios, en las páginas que siguen intentaremos analizar detalladamente lo que a primera vista parece tan sencillo, como es el conteo, pero que de hecho es extraordinariamente complejo y difícil para los niños.

1.4.1. Correspondencia uno-a-uno

Cuando contamos establecemos correspondencias biunívocas entre los objetos contados y los numerales utilizados, tal como puede observarse en la [Figura 1.5](#).

FIGURA 1.5

CORRESPONDENCIA ENTRE OBJETOS Y NUMERALES
--



Por tanto, el primer requisito que el niño necesita para contar correctamente consiste en tener la competencia para construir correspondencias uno-a-uno. Las investigaciones muestran que, a partir del primer año, el niño es capaz de construir correspondencias entre conjuntos de 1 o 2 elementos, y a lo largo del segundo año lo hará igualmente entre conjuntos de 3 y 4 objetos. Ahora bien, no está claro si los niños se limitan a hacer emparejamientos entre los objetos, o si además conocen la equivalencia numérica resultante de ese emparejamiento entre los dos conjuntos. No obstante, la correspondencia entre objetos (ver [Fig. 1.6](#)) es más sencilla y precoz en el niño que la correspondencia establecida entre objetos y numerales (ver [Fig. 1.5](#)). Ello explica que el inicio del conteo aparezca algo más tarde en el desarrollo infantil.

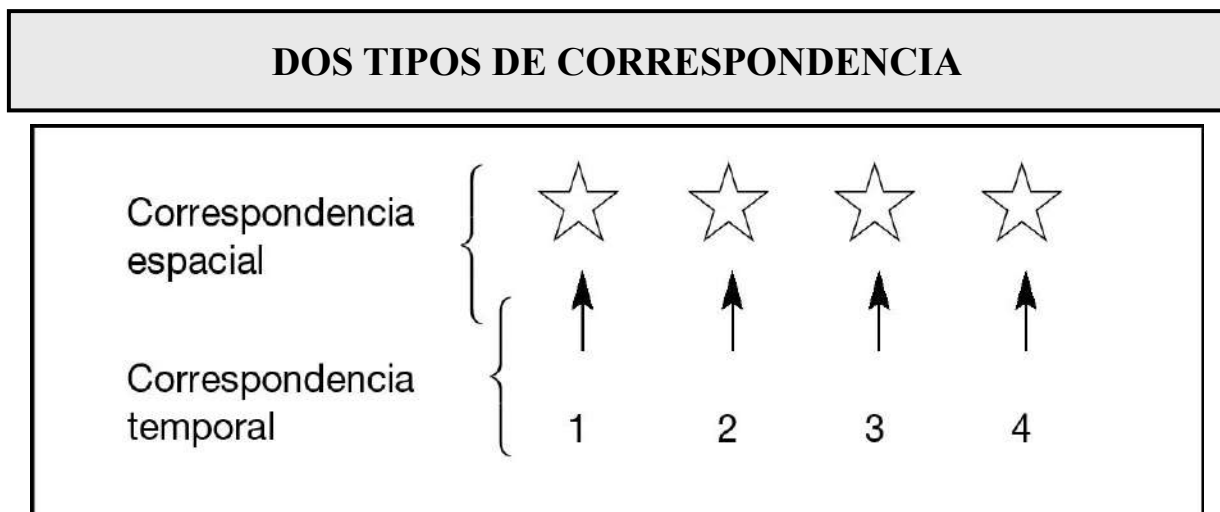
FIGURA 1.6



Ahondando aún más en cómo aprenden los niños a contar, podemos observar con Fuson (1988) que la ejecución correcta del conteo no sólo

supone llevar a cabo una correspondencia, sino dos correspondencias simultáneas. Efectivamente, cuando el niño aprende a contar —por tanto estamos hablando de niños pequeños—, necesita indicar o incluso tocar con el dedo cada uno de los objetos que cuenta, de modo que el «acto de indicación» constituye un elemento **necesario** del conteo. Este acto de indicación deja de ser necesario cuando el niño es mayor o en los adultos, que se transforma entonces en movimientos de cabeza o dirección de la mirada. La presencia del acto de indicación en el aprendizaje del conteo implica la ejecución de dos correspondencias, tal como podemos observar en la [Figura 1.7](#) (acto de indicación representado por una flecha). Una correspondencia está formada por los objetos (estrellas) y los actos de indicación (flechas), denominada correspondencia *espacial*, y la segunda está constituida por los actos de indicación y los numerales (correspondencia *temporal*). Ello significa que el aprendiz tiene que coordinar adecuadamente ambas correspondencias para que el conteo sea correcto, de modo que la violación de cualquiera de ellas daría lugar a una serie de errores, que analizamos a continuación.

FIGURA 1.7



1.4.1.1. Errores típicos del conteo

El análisis del comportamiento de los niños cuando están aprendiendo a contar muestra la aparición de una serie de errores típicos interesantes que

pueden afectar a la correspondencia espacial, a la temporal, o a las dos. Entre los errores que violan la **correspondencia espacial** destacamos los siguientes:

- 1) Omisión de objetos, de modo que no son señalados ni etiquetados con un numeral (ver [Fig. 1.8](#)).

FIGURA 1.8

EJEMPLO DE ERROR ESPACIAL DE OMISIÓN					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑		↑	↑
Etiquetación:	1	2		3	4

- 2) Repetición de objetos, que son señalados y etiquetados más de una vez (ver [Fig. 1.9](#)).

FIGURA 1.9

EJEMPLO DE ERROR ESPACIAL DE REPETICIÓN					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	3	4	5

- 3) Señalamiento y etiquetación de un lugar vacío entre dos objetos (ver [Fig. 1.10](#)).

FIGURA 1.10

EJEMPLO DE ERROR ESPACIAL						
Objetos:	0	0	0		0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	3	4	5	6

Entre los errores que afectan a la **correspondencia temporal**, destacamos los siguientes:

- 1) Se omite la etiqueta de un objeto correctamente señalado (ver [Fig. 1.11](#)).

FIGURA 1.11

EJEMPLO DE ERROR TEMPORAL DE OMISIÓN					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	3		4

- 2) Se asignan dos etiquetas a un objeto correctamente señalado (ver [Fig. 1.12](#)).

FIGURA 1.12

EJEMPLO DE ERROR TEMPORAL DE REPETICIÓN						
Objetos:	0	0	0	0	0	
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑	
Etiquetación:	1	2	3	4	5	6

- 3) Emisión de un numeral o etiqueta sin objeto ni acto de indicación referencial (ver [Fig. 1.13](#)).

FIGURA 1.13

EJEMPLO DE ERROR TEMPORAL					
Objetos:	0	0	0	0	
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	
Etiquetación:	1	2	3	4	5

- 4) Fraccionamiento de un numeral entre dos objetos y actos de indicación (ver [Fig. 1.14](#)).

FIGURA 1.14

EJEMPLO DE ERROR TEMPORAL					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	TRE	ES	4

Los **errores *duales*** son aquellos que transgreden simultáneamente las dos correspondencias: espacial y temporal:

- 1) Se señala más de una vez un objeto asignándole una sola etiqueta o numeral (ver [Fig. 1.15](#)).

FIGURA 1.15

EJEMPLO DE ERROR DUAL					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑ ↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	3	4	5

- 2) Se señala dos veces un objeto sin asignación de etiqueta (ver [Fig. 1.16](#)).

FIGURA 1.16

EJEMPLO DE ERROR DUAL					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑ ↑	↑
Etiquetación:	1	2	3		4

- 3) El niño señala de manera irregular los objetos, al tiempo que emite numerales sin conexión con los actos de señalar, ni con los objetos (ver [Fig. 1.17](#)).

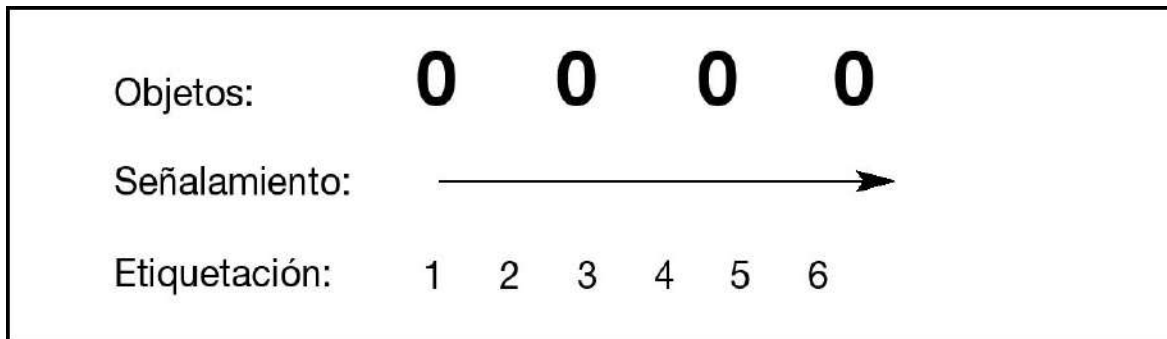
FIGURA 1.17

EJEMPLO DE ERROR DUAL					
Objetos:	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑		↑
Etiquetación:		1		2 3	4

- 4) Los niños más pequeños hacen un gesto rasante a lo largo de la hilera de objetos, emitiendo simultáneamente y de manera continua un conjunto de numerales (ver [Fig. 1.18](#)).

FIGURA 1.18

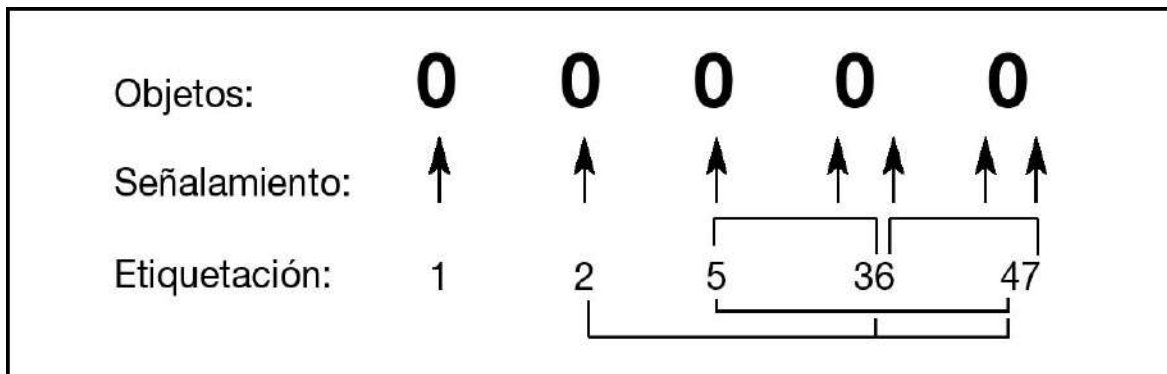
EJEMPLO DE ERROR DUAL



Finalmente, aparecen otros errores que consisten en que los niños cuentan dos veces dos o más objetos, tal como ocurre, por ejemplo, en la [Fig. 1.19](#). Aquí el niño vuelve hacia atrás para contar un objeto olvidado, contando de nuevo los dos últimos objetos.

FIGURA 1.19

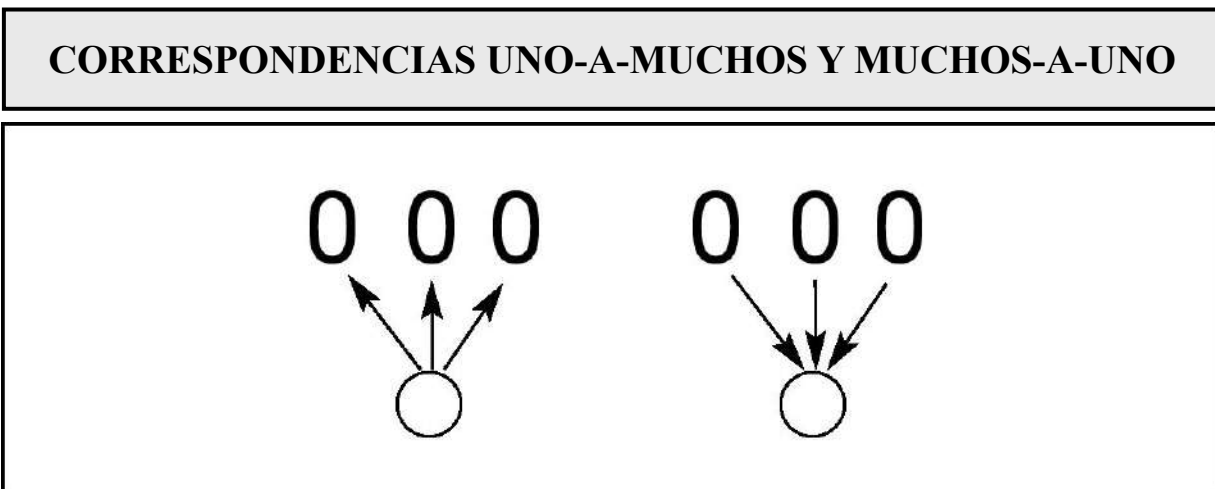
EJEMPLO DE OTROS ERRORES



Ahora bien, la frecuencia de los tipos de errores no es la misma en los niños, de modo que suelen aparecer más errores en la correspondencia espacial que en la temporal (83% vs. 61% según Fuson, 1988). Y, más en concreto, los errores más frecuentes corresponden a los ejemplos recogidos en las [Figuras 1.8](#), [1.9](#) y [1.11](#) (66%, 71% y 58% respectivamente). Aunque no resulta fácil explicar las causas de estos errores, algunos autores han

supuesto que muchos de ellos podrían deberse a la aplicación por parte de los niños de patrones de correspondencia evolutivamente anteriores a la correspondencia biunívoca, como son las correspondencias uno-a-muchos y muchos-a-uno (ver [Fig. 1.20](#)).

FIGURA 1.20



(Ver estrategias para enseñar la correspondencia en 2.3.2.1.)

1.4.2. La secuencia de numerales

El principio de orden estable del modelo de Gelman y Gallistel establece que la secuencia de etiquetas o numerales debe ser repetible y estar integrada por etiquetas únicas. Lo primero significa que el niño suele emplear esta secuencia para contar, y lo segundo hace referencia a que las etiquetas empleadas no se repiten en la secuencia, es decir, el mismo numeral no aparece en la secuencia más de una vez. Por tanto, la aplicación de este principio sería correcta cuando el niño emplea secuencias idiosincrásicas que no se ajustan a la secuencia convencional, pero que respetan las condiciones mencionadas (ver [Fig. 1. 21](#)). Al mismo tiempo que el niño aprende la secuencia convencional, suele emplear también listas idiosincrásicas que le son útiles, personalmente, para cuantificar la realidad, pero que pueden crear problemas en contextos sociales.

FIGURA 1.21

EJEMPLO DE LISTA DE IDIOSINCRÁSICA				
Objetos:	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	4	6

Por otra parte, los niños comprenden muy pronto que el conteo requiere una lista especial de numerales únicos. Pero la construcción gradual de esta comprensión supone tres pasos:

- descubrir que la lista está constituida solamente por numerales;
- que esta lista tiene un orden determinado,
- y, finalmente, que cada numeral es único y no se repite en la lista.

En el aprendizaje de la secuencia convencional de los numerales se han diferenciado dos fases que pueden solaparse a lo largo del tiempo: adquisición y elaboración o consolidación. En la fase de adquisición, el niño aprende la secuencia estándar y la utiliza cuando cuenta, apareciendo frecuentemente errores que se localizan sobre todo en la parte final de la secuencia. Efectivamente, en la adquisición de la secuencia convencional de numerales podemos diferenciar tres partes o fragmentos característicos, tal como puede observarse en el ejemplo de la [Figura 1.22](#): la parte inicial, que en el ejemplo abarcaría sólo los dos primeros numerales, es estable y convencional, de modo que el niño la usa siempre que cuenta. La segunda, que en el ejemplo sólo hace referencia a los dos siguientes numerales, sería estable pero no convencional, ya que siempre se utiliza la misma secuencia, pero no se ajusta a la lista convencional. Finalmente, la última parte no sería ni estable, ni convencional, en el sentido de que el niño cambia los numerales cuando cuenta y no se ajusta a la secuencia convencional.

FIGURA 1.22

EJEMPLO DE LA FASE DE ADQUISICIÓN

Objetos:	0	0	0	0	0	0
Señalamiento:	↑	↑	↑	↑	↑	↑
Etiquetación:	1	2	4	6	9	7

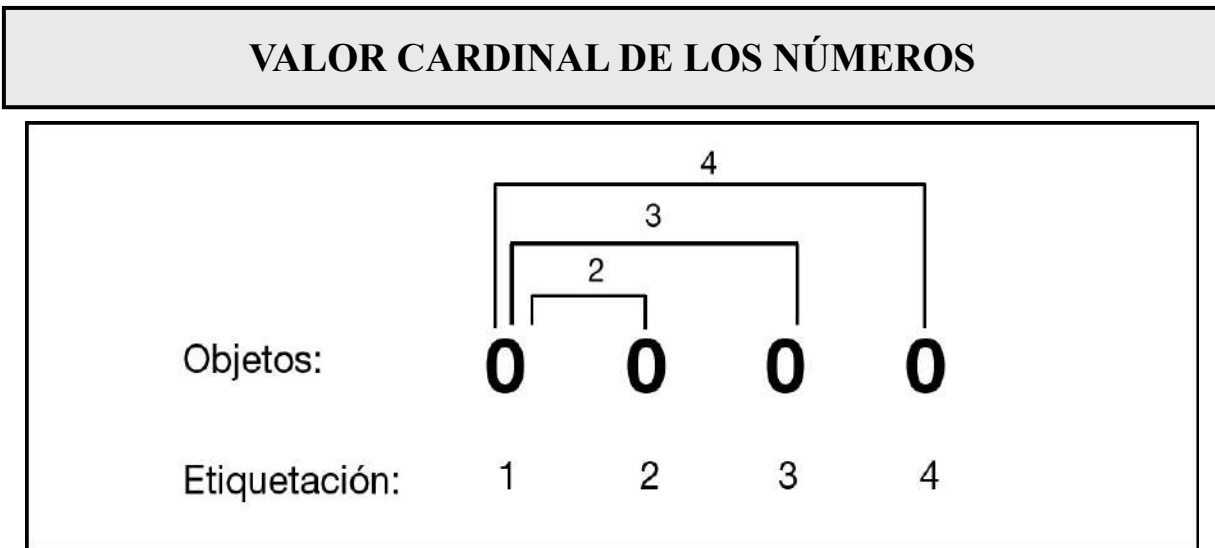
En la fase de elaboración y consolidación de la secuencia se distinguen cinco niveles evolutivos en función de la comprensión y el uso que los niños son capaces de hacer de los numerales (Fuson, 1988):

- 1º) El niño sólo es capaz de emitir la secuencia de numerales empezando necesariamente por el 1, como si se tratara de una cuerda sin diferenciación entre los distintos elementos de la secuencia (nivel de hilera o cuerda).
- 2º) La secuencia aparece como una cadena irrompible, pero ahora sus elementos o numerales se conciben como diferenciados unos de otros (nivel de cadena irrompible).
- 3º) Nivel de cadena rompible, ya que los niños pueden emitir fragmentos de la secuencia de los numerales, sin empezar necesariamente por el «1». En otras palabras, ahora la competencia numérica del niño le permite continuar la secuencia convencional aprendida a partir de cualquier numeral, como, por ejemplo: 3-4-5-...
- 4º) El grado de elaboración y abstracción es mayor, de modo que los niños pueden incluso entender los numerales como elementos contables.
- 5º) Finalmente, el niño puede emitir de manera fluida y con entera flexibilidad la secuencia de los numerales tanto hacia adelante como hacia atrás, a partir de un numeral dado.

Por otra parte, algunos autores han propuesto que los pasos que siguen los niños para aprender la secuencia de los numerales serían fundamentalmente tres:

- a) memorizar los términos de las unidades;
- b) generar las decenas a partir de los nombres de las unidades;
- c) y aprender las reglas de generación que combinan unidades y decenas para constituir números mayores.

FIGURA 1.23



Ahora bien, ¿cuándo entienden los niños que los numerales y su secuencia son convencionales? Según Saxe y otros (1989), esta comprensión requiere su tiempo, de modo que a los cuatro años pocos niños comprenden esta convencionalidad, mientras que suele ser frecuente a los seis y sobre todo a los ocho años. Incluso estos mismos investigadores encuentran que los niños bilingües comprenden antes la arbitrariedad de la secuencia numeral.

(Ver estrategias para enseñar la secuencia de los numerales en 2.3.2.2.)

1.4.3. Cardinal numérico

El cardinal numérico indica el número de objetos que hay en un conjunto dado. Por ejemplo, en la mano hay 5 dedos. Ahora bien, el «principio de cardinalidad», tercer principio del modelo de Gelman y Gallistel, no se ajusta exactamente al concepto de cardinal numérico antes mencionado. Efectivamente, este principio reza así: el último numeral utilizado para contar los elementos de un conjunto representa e indica los objetos que hay en ese conjunto (ver [Fig. 1.2](#)). Pero el cardinal numérico es un concepto más amplio, en cierto sentido, que el principio de cardinalidad, ya que éste supone no sólo el uso del conteo, sino además que haya sido ejecutado correctamente empleando la secuencia convencional. En cambio, podemos determinar los objetos de un conjunto utilizando procedimientos diferentes al conteo, como por ejemplo, mediante subitización o estimación.

Por otra parte, al contar, no sólo el último numeral utilizado en la secuencia representa los objetos contados, sino que cualquiera de los numerales empleados representa los objetos contados hasta ese momento, debido al significado inherente de los mismos números. Así, tal como aparece en la [Figura 1.23](#), el «2» indica los objetos que se han contado hasta ese momento, el «3» representa igualmente los objetos contados hasta ese momento, etc.

Ahora bien, el niño empieza a adquirir el cardinal numérico muy pronto. A lo largo del segundo año, como vimos anteriormente, muchos niños utilizan ya el «2» para indicar cuántos elementos hay en un conjunto de dos objetos o dedos mediante el uso de la subitización (ver [Fig. 1.1](#)). Pero el uso del conteo para determinar cuántos elementos hay en un conjunto constituye una habilidad más compleja que requiere un mayor desarrollo en los niños. Sin embargo, Gelman y Gallistel defienden que a los dos años y medio los niños son capaces de usar correctamente el principio de cardinalidad, que se manifestaría cuando los niños repiten o enfatizan el último numeral de la secuencia de conteo empleada.

Pero estas respuestas no garantizan la comprensión por parte del niño de la noción de cardinal numérico. Efectivamente, como muestra el modelo de niveles de comprensión de Bermejo (1996), los niños pasarían por las siguientes etapas:

- 1º) Incomprensión de la situación y respuestas al azar (hasta los 2, 6 años).

- 2º) Repetición de la secuencia de conteo utilizada (2, 6 a 3, 0 años).
- 3º) Volver a contar: el niño vuelve a contar al preguntarle cuántos objetos hay (3, 0 a 3, 6 años).
- 4º) Aplicación de la «regla del cuántos»: ante la pregunta «cuántos hay», la reacción mecánica de los niños consiste en dar el último numeral utilizado en el conteo, sea éste correcto o incorrecto (3, 6 a 4, 0 años).
- 5º) Dar el numeral mayor utilizado en el conteo, sea o no el último empleado (4, 0 a 4, 6 años).
- 6º) Respuesta correcta de cardinalidad: comprensión del cardinal numérico (a partir de 4, 6 años).

Aunque las edades señaladas son aproximadas y existen diferencias interindividuales importantes, no resulta difícil determinar el nivel de competencia de un niño con respecto al cardinal numérico. Existen diferentes procedimientos para ello, como por ejemplo:

- preguntar cuántos objetos hay en un conjunto dado después o antes de contar;
- pedir al niño n objetos;
- preguntar al niño cuántos objetos hay después de haber contado una muñeca aprendiz (puede cometer errores);
- etc.

Sin embargo, no es fácil diferenciar los niveles 4º y 6º cuando se utiliza la secuencia convencional, ya que en ambos casos la respuesta correcta es la misma. En cambio, se identifican fácilmente ambos niveles si pedimos al niño (o a una muñeca), por ejemplo, que utilice la secuencia numeral hacia atrás para contar (ver [Fig. 1.24](#)). En este caso, a la pregunta «cuántos hay», el niño del 4º nivel responderá «2», mientras que el niño del 6º nivel dirá «4» en el ejemplo propuesto. Otro procedimiento más para diferenciar ambos niveles reside en utilizar secuencias convencionales con omisiones (ej.: 1-2-4-6 o 1-2-5-3, etc.).

Por tanto, parece claro que la adquisición y comprensión del cardinal numérico no se obtiene súbitamente, sino que supone un proceso más o menos largo en el desarrollo numérico del niño. Además, el momento

evolutivo de su aparición va a depender del procedimiento empleado. Si se utiliza la subitización, aparece antes en el desarrollo que cuando se emplea el conteo, tal como hemos visto. Ello se debe, no sólo a la mayor precocidad de la subitización, sino también a que el conteo no tiene al principio un significado cardinal para el niño, es decir, no sabe que el conteo sirve para determinar cuántos objetos hay en un conjunto. (Ver estrategias para enseñar el cardinal numérico en 2.3.2.3).

FIGURA 1.24

SECUENCIA DE CONTEO HACIA ATRÁS			
0	0	0	0
5	4	3	2

1.4.4. Principio de abstracción

Este principio establece que todos los objetos de un conjunto o colección, sean homogéneos o heterogéneos, constituyen elementos contables o cosas que pueden contarse. A partir de los tres años aproximadamente los niños cuentan con la misma facilidad conjuntos homogéneos y heterogéneos, como, por ejemplo, objetos de diferentes formas o colores (peras y manzanas). Pero antes, el niño contaría primero las peras, por ejemplo, y después las manzanas, como si se tratara de dos conjuntos diferentes. No obstante, el objetivo cuantificador perseguido por el conteo podría cambiar el modo de contar los objetos. Efectivamente, los niños de cuatro años cuentan de modo diferente el conjunto de objetos que tienen delante formado por cucharillas, si algunas de ellas están partidas por la mitad. Si se les pide que cuenten y nos digan cuántas cucharillas hay, su modo de contar sería diferente que cuando se les pregunta cuántos objetos hay. Por tanto, es

importante que el niño identifique el tipo de unidad que sirve para contar o se va a contar.

1.4.5. Irrelevancia del orden

El último principio del modelo de Gelman y Gallistel señala que el orden en que se asignen los numerales (o etiquetas) a los objetos resulta irrelevante, siempre y cuando se etiquete una sola vez cada uno de los objetos del conjunto. Si así es, el cardinal será siempre el mismo independientemente del orden seguido en el conteo. Por tanto, el conteo estándar permite empezar a contar por la izquierda, o por la derecha, o por el centro de la hilera de objetos, ya que el cardinal-resultado será siempre el mismo. Sin embargo, esto no resulta tan fácil para los niños. Hasta los 4 o incluso 5 años los niños no admiten la irrelevancia del orden y, sobre todo, no aceptan que el resultado del conteo sea el mismo según que empecemos a contar por la derecha, por la izquierda, o por el centro. Los niños pequeños afirman con seguridad que «así no se cuenta» o que «está mal», si nos desviamos del procedimiento habitual de contar empezando por la izquierda.

Por otra parte, el dominio de este principio supone además en el niño las siguientes competencias:

- a) la correspondencia uno-a-uno;
- b) el orden estable;
- c) el cardinal numérico.

(Ver estrategias para enseñar el principio de abstracción e irrelevancia del orden en 2.3.2.4.)

1.5. BIBLIOGRAFÍA

Bermejo, V. (1996). «Cardinality development and counting». *Developmental Psychology*, 32, 263-268.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.

Gelman, R. y Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Saxe, G. B., Becker, J., Sadeghpour, M. y Siciliani, S. (1989). «Developmental differences in children's understanding of number word conventions». *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 468-488.

Starkey, P. y Cooper Jr, R. G. (1995). «The development of subitizing in young children». *British Journal of Developmental Psychology*, 13, 399-420.

2

Enseñando a contar

V. Bermejo • A. Martín Mansilla

2.1. CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS GENERALES

Hemos visto en el capítulo anterior que el conteo no es precisamente una habilidad sencilla para los niños, de modo que su completa adquisición supone un gran esfuerzo para ellos, aunque frecuentemente los adultos no seamos conscientes de ello.

La Educación Infantil es la etapa educativa en la que se «enseña a contar» y concretamente se desarrolla en el segundo ciclo (3-6 años). La normativa legal recoge estos contenidos en el área de Comunicación y Representación dentro del bloque VI:

* CONCEPTOS

— El número

- Unidad: Aspectos cardinales y ordinales del número.
- La serie numérica. Los primeros números.

* PROCEDIMIENTOS

- Construcción de la serie numérica mediante la adición de la unidad.
- Utilización de la serie numérica para contar elementos y objetos de la realidad.
- Representación gráfica de la cuantificación de las colecciones de objetos mediante códigos convencionales y no convencionales.

* ACTITUDES

- Gusto por explorar objetos, contarlos y compararlos, así como por actividades que impliquen poner en práctica conocimientos sobre las relaciones entre objetos.
- Apreciación de la utilidad de los números en los juegos y problemas que se presentan en la vida cotidiana.

Nos parece útil, y quizá necesario, recordar brevemente algunas consideraciones metodológicas de esta etapa educativa.

Partimos de una perspectiva constructivista que entiende al niño como constructor de su propio conocimiento. Por tanto, se trata de un niño que desarrolla un papel activo en su aprendizaje, tanto por la intensa actividad cognitiva que desarrolla, como por la actividad manipulativa.

Aunque no hay un método único para trabajar en esta etapa, **la perspectiva globalizadora** se perfila como la más adecuada para que los aprendizajes que realizan los niños y niñas sean **significativos**. Esto supone que el aprendizaje resulta del establecimiento de múltiples conexiones y relaciones entre lo nuevo y lo ya aprendido.

Por otra parte, los **aspectos socioafectivos** adquieren una importancia especial en EI. Los niños pequeños necesitan un clima que les transmita una **confianza básica** y la **seguridad** que precisan para su desarrollo. Cuanto mejor se siente un niño, más se implica en la actividad, más se desarrolla y aprende. Por eso, como veremos más adelante, estimulando y aprovechando la «*matemática inventada*» por ellos mismos, estaremos fomentando no sólo

el aprendizaje significativo del que hablábamos antes, sino también su implicación y su autoconfianza.

Hay que destacar también que **la interacción entre niños y niñas** es un recurso metodológico relevante. Las discusiones que surjan entre ellos, las opiniones y argumentos que se manejen y los reajustes que se generen en el grupo cuando estén contando facilitarán el progreso intelectual y socioafectivo de nuestros alumnos.

Con respecto a la **función del profesor** de EI, entendemos que es una labor de mediador que intenta organizar actividades y experiencias favorecedoras del aprendizaje, mostrando una actitud receptiva, observadora y positiva, alentando al niño a decir en cada momento lo que piensa, sin miedos a posibles errores. Actitud igualmente positiva hacia el aprendizaje cooperativo y de valoración de las cosas que puede aprender con sus compañeros.

Concluimos este apartado señalando algunas **implicaciones educativas** que conviene tener en cuenta en nuestra práctica docente:

- a) La enseñanza significativa de las matemáticas tiene que partir de la matemática informal de los niños y basarse en ella.
- b) El *juego es una* herramienta valiosa para el aprendizaje, de modo que su uso resulta indispensable para desarrollar la competencia aritmética de los niños. Su *curiosidad y su interés natural* para realizar recuentos habrá que aprovecharlos al máximo.
- c) Estructurar experiencias informales para fomentar el aprendizaje por descubrimiento.

2.2. ESPACIOS, TIEMPOS Y MATERIALES PARA APRENDER

No todos los niños tienen que resolver las mismas cosas al mismo tiempo. Además, sabemos que lo que más gusta y sirve para un niño no siempre es lo mejor para otros. Se hace necesaria una distribución de tiempos y espacios

que faciliten actividades colectivas e individuales que tengan en cuenta estas diferencias evolutivas y de intereses.

Respetar estas diferencias será tan importante como tener presente que en la escuela hay que aprovechar situaciones funcionales que ofrecen múltiples oportunidades para que los niños cuenten.

Algunos de estos momentos más ricos se producen en:

- **La entrada:** Es un momento dedicado al intercambio de comentarios, de sus «tesoros» y donde surgen o pueden surgir, habitualmente, momentos «matemáticos» (cuántos cromos traes, cuántos me faltan, etc.).
- El trabajo **por rincones** es una propuesta que ofrece gran diversidad de materiales y en cada uno de ellos se hace posible la construcción de diferentes aprendizajes. Por ejemplo:
 - En la «**cocinita**» se prepara la mesa poniendo igual número de vasos, de platos y cubiertos. Se pregunta o se piden los objetos necesarios hasta conseguir el objetivo deseado.
 - En el **rincón de construcciones y coches**: Se agrupan por colores o se reparten utilizando expresiones como «yo sólo tengo tres y tú tienes cinco», «yo quiero dos azules» o «en el garaje vamos a meter cuatro».
- **El patio:** Es el contexto ideal para los juegos tradicionales de persecución, ocultación y de puntería. En casi todos ellos interviene de alguna manera el número ya sea para desarrollar la secuencia numérica (contar para jugar al escondite) o bien para establecer correspondencias uno a uno (en el pasemisi) o averiguar el cardinal numérico (cuántos bolos se han caído).
- **Las sesiones de psicomotricidad:** Aquí se trabaja con materiales que necesitamos contar, repartir, compartir (aros, pelotas, cuerdas, zancos, etc.) y con el propio cuerpo que tantas posibilidades nos brinda para desarrollar los principios del conteo.
- En **la Asamblea:** Es el tiempo dedicado a la comunicación en grupo, donde se cuentan cosas, se organiza el juego o se resuelven conflictos, situaciones todas ellas que aportan innumerables

razones para cuantificar la realidad: contar los que están en clase, los que se han quedado en casa, mirar en el calendario cuánto queda para celebrar un cumpleaños, etc.

- En la **recogida de material**: Es el momento de ordenar y colocar los materiales y objetos utilizados (faltan 2 tapas de rotuladores, sólo quedan 3 rodillos, se ha perdido una ficha roja, etc.).

Por tanto, hay diversos modos de favorecer el aprendizaje en clase de EI:

- Organizando distintos espacios bien equipados y ordenados con materiales variados y ricos que estimulen la exploración.
- Disponiendo los materiales al alcance de los niños para que puedan utilizarlos cuando los necesiten.
- Permitiendo la elección de actividades individuales o de grupo de forma autónoma y voluntaria.
- Planificando el tiempo y las condiciones necesarias para realizar las actividades libres o sugeridas, proyectadas por los propios niños o programadas por el profesor en los rincones o áreas de trabajo.
- Fomentando relaciones de apoyo y colaboración entre los niños.

En consecuencia, es bueno aprovechar los distintos momentos para el aprendizaje, ya que especialmente en Educación Infantil todo el tiempo es educativo y no se puede separar artificialmente el momento de aprender y el momento de vivir.

2.3. ENSEÑAR A CUANTIFICAR

Como hemos visto en el capítulo anterior, la competencia numérica se inicia muy pronto en el desarrollo infantil. Cuando los niños se incorporan a la escuela ya poseen cierta competencia matemática (saben decir cuántos años tienen, contar conjuntos pequeños, etc.). Han aprendido con su familia, con otros niños, con la televisión, con los juegos, etc. Si partimos de este bagaje de ideas, de conocimientos previos informales que traen los niños, estaremos consiguiendo que la enseñanza sea significativa, aumentaremos la

probabilidad de que el aprendizaje escolar tenga éxito y, en consecuencia, que se incremente la autoestima y el desarrollo afectivo en general.

Todos tenemos anécdotas en nuestra práctica diaria de las actividades y momentos de la escuela que favorecen el acercamiento del niño al número (coleccionismo, bolos, construcciones, etc.), y si también echamos una «mirada matemática» hacia nuestra práctica docente descubrimos una gran riqueza de contenidos matemáticos en actividades que, de entrada, no parecen diseñadas para trabajar esos contenidos. Las actividades de lectoescritura son un buen ejemplo de lo que estamos diciendo. Desde los tres años los niños y niñas están acostumbrados a ver sus nombres con letras mayúsculas. El proceso de reconocimiento de su nombre es extraordinariamente rápido y comienza la comparación con el resto de los nombres de sus compañeros. Y lo hacen buscando diferencias y semejanzas: SARA - ANA - SUSANA y, enseguida, les oyes decir: «Yo tengo dos A, tú tienes una», «Las tres de tu nombre están en el mío», etc. Cuentan las letras que tiene cada uno en su nombre, quién tiene más, quién tiene menos, etc.

Por lo tanto, la cuantificación de la realidad se inicia muy pronto en el desarrollo del niño. Esta cuantificación puede realizarse mediante distintos procedimientos. Veamos aquí dos de los más importantes: la subitización y el conteo.

2.3.1. Procedimientos de subitización

Hemos visto en el [capítulo 1](#) que la subitización o percepción inmediata implica el reconocimiento inmediato de pautas numéricas y es anterior a la habilidad de contar. De hecho, los niños no necesitan saber contar para determinar el cardinal numérico de conjuntos pequeños.

Veamos algunas actividades útiles para trabajar en el aula la subitización:

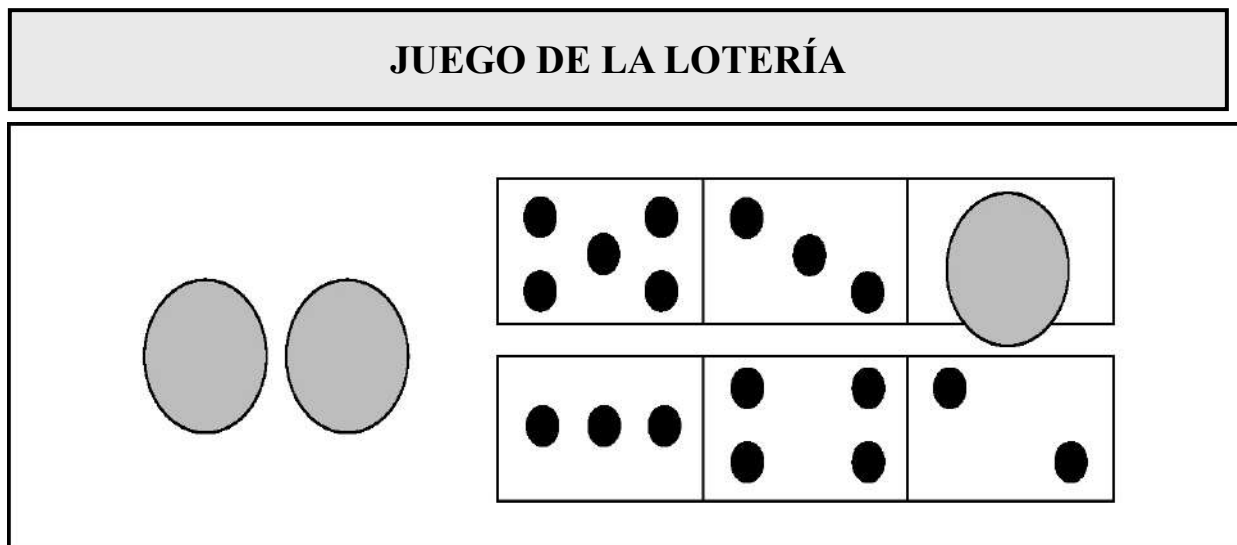
- El reconocimiento de pautas regulares mediante el juego con dados o el dominó.
- Pautas digitales para los números del 1 al 3 y del 1 al 5, según la edad. Muchos niños aprenden pautas digitales automáticas, incluso las manejan antes de entrar a la escuela, por ejemplo, para indicar los años que tienen. El profesor podrá apoyar las cantidades usando

también los dedos cuando va a repartir cualquier material: al mismo tiempo que dice vamos a repartir dos a cada uno, se sacarán los dos dedos correspondientes.

Algunos juegos que estimulan el trabajo con pautas numéricas serían para trabajar en grupo pequeño y podrían introducirse en el rincón de juegos de mesa, como por ejemplo:

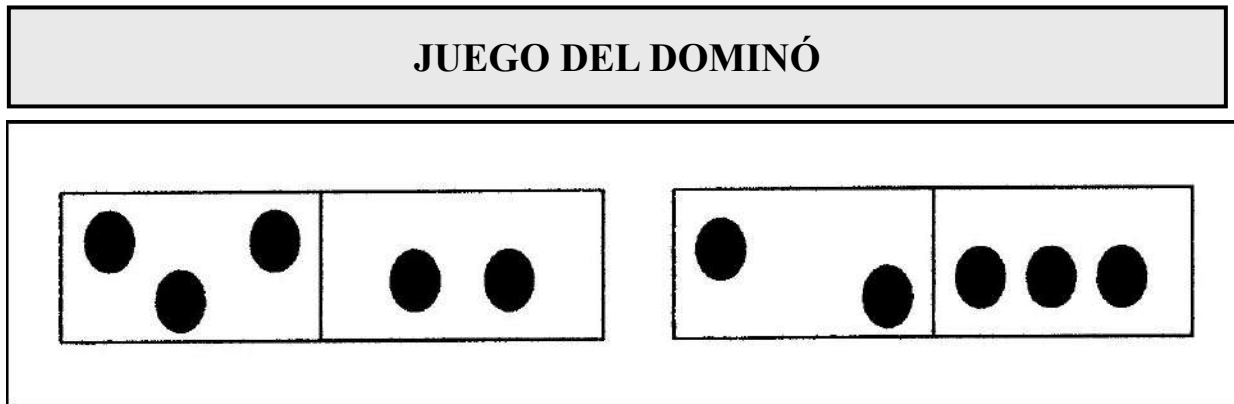
1) **LA LOTERÍA:** Cada jugador toma su cartón con tres pautas numéricas (ver Fig. 2.1). El profesor va sacando de una bolsa distintas tarjetas con las mismas pautas y las va dejando sobre la mesa. Cada niño debe estar atento para identificar las suyas. Cuando sale alguna que tiene en su cartón, la rellena o señala. Les explicamos que vamos a ver quién rellena primero su tablero. El primer jugador que lo complete gana la partida. El material, que podemos elaborar nosotros, será cada vez más complejo en función de la edad de los niños.

FIGURA 2.1



2) **EL DOMINÓ** es otra actividad que se puede emplear para el reconocimiento de pautas numéricas. Puede ser el clásico o se puede jugar con variantes que existen en el mercado. También podemos fabricar nosotros mismos las fichas para empezar con 1, 2, 3 y 4 con distintos formatos del mismo número como se puede apreciar en la Figura 2.2.

FIGURA 2.2

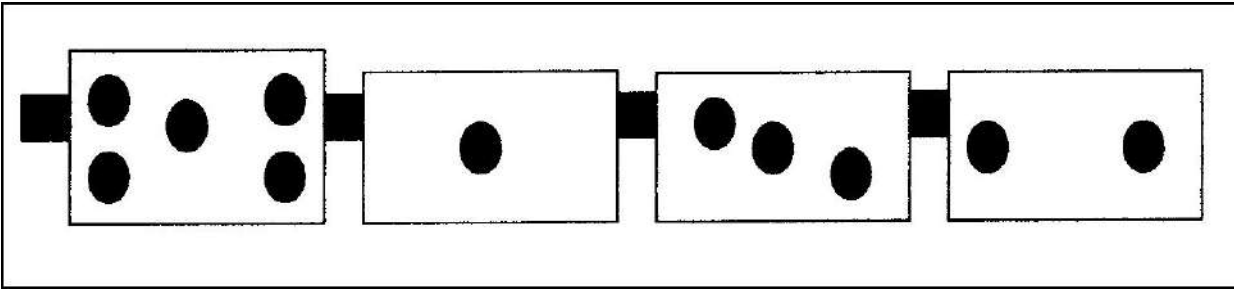


Los juegos de DADOS pueden ser muy útiles para trabajar con grupos grandes. Existen en el mercado varios modelos de dados de goma espuma o plástico de gran tamaño que nos servirán para numerosos juegos de recorridos o carreras con tablero o en el suelo para participar individualmente o por equipos. Irá siendo más complejo a medida que el momento evolutivo de los niños nos lo permita. Algunos ejemplos podrían ser en LA ASAMBLEA:

- a) **EL PROTAGONISTA** de cada día elige un atributo, por ejemplo: objetos de color azul, y lanza el dado. Después de tirarlo, fomentaremos la percepción inmediata, eligiendo el aro que contiene la cantidad de elementos que haya salido en el dado. Se puede empezar con dados que contengan sólo hasta 4 puntos.
- b) **CARTAS CON DADOS.** Se reparten 4 fichas o cartas (con los mismos puntos que el dado) a cada equipo y va lanzando el dado. Les pedimos que entreguen la ficha que sea igual a la cantidad de la tirada. La profesora va recogiénolas y gana el equipo que se quede sin cartas o fichas en primer lugar (ver [Fig. 2.3](#)).

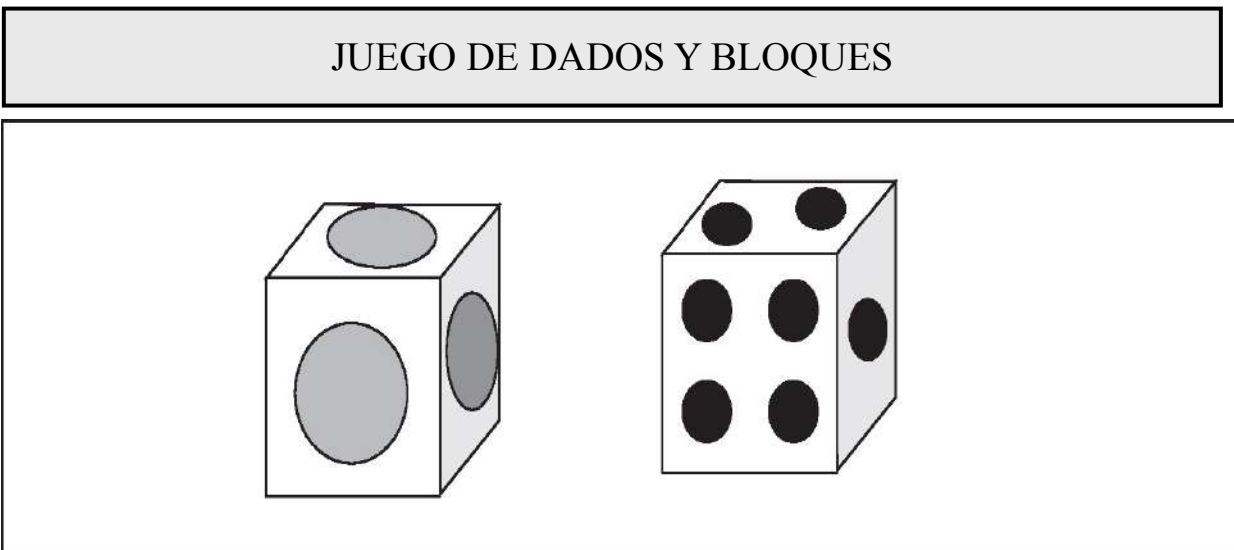
FIGURA 2.3





- c) **BLOQUES LÓGICOS:** Primero se usará el dado convencional, pero más tarde se introducen otros para que la tirada sea doble o triple en 5 años. Se inicia el juego con la caja llena de piezas y cada jugador tiene que coger la cantidad de bloques que le sale en la tirada con el dado. La partida finaliza cuando se acaban las piezas y gana el jugador que consigue más bloques (ver [Fig. 2.4](#)).

FIGURA 2.4



- d) **ADIVINA ADIVINANZA (Pautas digitales): UNO, DOS o TRES:** Los jugadores se colocan por parejas. Uno esconde una mano tras de sí y estira 1, 2 o 3 dedos (o se guarda 1, 2 o 3 elementos dentro de una mano) preguntando a su compañero ¿1, 2 o 3? El otro jugador contesta y éste le muestra la mano para verificar la respuesta. Si el jugador acierta intercambian los papeles. También

se puede jugar cerrando los ojos. Se puede realizar con monedas, canicas, etc., y más adelante se puede jugar con más de tres elementos (ver Fig. 2.5).

FIGURA 2.5



Por tanto, existen diversas situaciones lúdicas que favorecen la adquisición y desarrollo de la subitización. El uso de una u otra situación dependerá del nivel evolutivo del niño (sus conocimientos previos) y del contexto.

2.3.2. El conteo

Hay razones que aconsejan el no aplazamiento de experiencias y de la enseñanza del conteo:

- 1ª) Porque hemos visto, a lo largo del primer capítulo, la complejidad que encierra esta tarea para nuestros alumnos.
- 2ª) Porque conocemos la importancia que tiene para la comprensión del número.

- 3ª) Porque se trata de una habilidad útil e interesante para la vida cotidiana del niño.

El modelo clásico del conteo consta de cinco principios o componentes (ver [cap. 1](#)). Veamos algunos recursos o estrategias para enseñar cada uno de ellos.

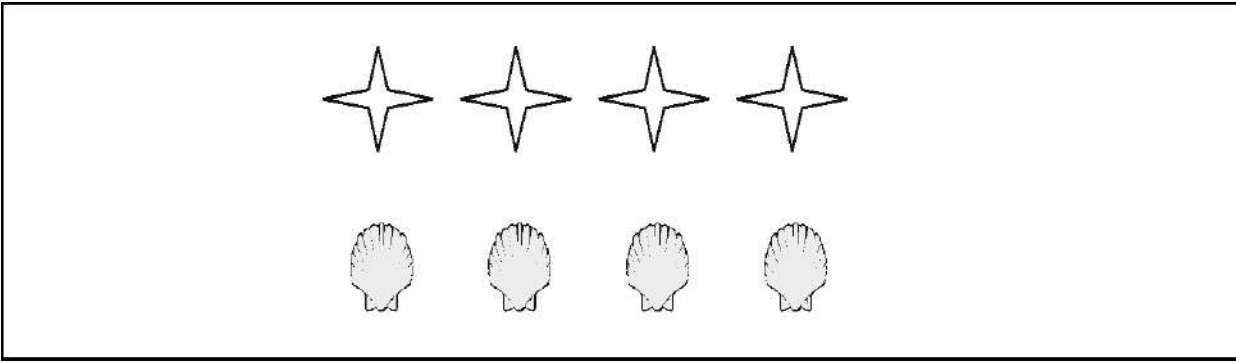
2.3.2.1. Correspondencia uno-a-uno

El niño tiene que contar coordinando las palabras que emplea (numerales), los actos de indicación o señalamientos con el dedo y los objetos que cuenta. La realización de las dos correspondencias que supone el conteo resulta extraordinariamente complejo. A los tres años el niño no se da cuenta de que el proceso de enumeración es un medio, viviéndolo como un fin en sí mismo. Por eso, ante la pregunta cuántos hay, se limitará a establecer la correspondencia uno-a-uno. Ahora bien, se trata de garantizar una correcta asignación de cada palabra numérica a uno y sólo un elemento contable (ver [cap. 1.4.1](#)).

Sabiendo que la correspondencia entre objetos es más precoz y sencilla que la correspondencia entre objetos y numerales, facilitaremos el aprendizaje, sobre todo en los primeros niveles de Educación Infantil, con actividades y experiencias en los distintos rincones del aula. Empezaremos presentando correspondencias entre objetos, tal como aparecen en la [Fig. 2.6](#).

FIGURA 2.6

CORRESPONDENCIA ENTRE OBJETOS



Precisamente una actividad tan cotidiana como la ASAMBLEA nos brinda la oportunidad de interesar a los niños en el conteo:

- Así, cada día, el protagonista después de **pasar lista**, va contando uno a uno el número de niños que han acudido a clase. En un primer momento el maestro puede prestar las ayudas necesarias, para ir paulatinamente retirando estas ayudas.
- También puede establecerse una correspondencia uno-a-uno entre las tarjetas de los niños que han faltado para colocarlas en su lugar correspondiente, de modo que al tiempo que se nombran los niños que no han venido, se puede ir señalizando con los dedos. Primero puede hacerlo el profesor y más tarde el niño encargado.
- En el **calendario** tenemos señalizadas actividades significativas, y aparecerán pictogramas de los cumpleaños, excursiones, fin de semana, festivos, etc. Es el protagonista el que también se ocupa de ir contando uno a uno los días que faltan para celebrar el cumpleaños, para ir a la Granja Escuela o para el fin de semana.
- Puede surgir la polémica, con frecuencia, entre lo que dice el «protagonista» «faltan 5 niños» y el recuento que hace otro miembro del grupo. En este contexto, es importante aprovechar el conflicto que suscite cualquier recuento para poner en funcionamiento el pensamiento. La ayuda del adulto no debe consistir en darle la respuesta correcta, sino en invitarles a la reflexión.

El análisis de los errores que cometen los niños cuando se enfrentan a esta tarea puede ser una importante fuente de información sobre los

conocimientos que poseen, donde se produce la dificultad y qué es necesario volver a enseñar específicamente. Por tanto, el examen de estos errores sistemáticos es crítico para planificar la enseñanza adecuada (ver [cap. 1](#)).

Algunos recursos y materiales que podemos usar serían:

a) Plastilina o arcilla

El trabajo con este tipo de materiales nos proporciona innumerables situaciones para establecer correspondencias uno-a-uno. Primero se llevan a cabo correspondencias entre objetos que los mismos niños modelan (tres bolas azules y tres amarillas, cuatro caracoles y cuatro gusanos, etc.); y después y casi de forma espontánea se inician los señalamientos con el dedo para cuantificar los conjuntos de cosas que está creando.

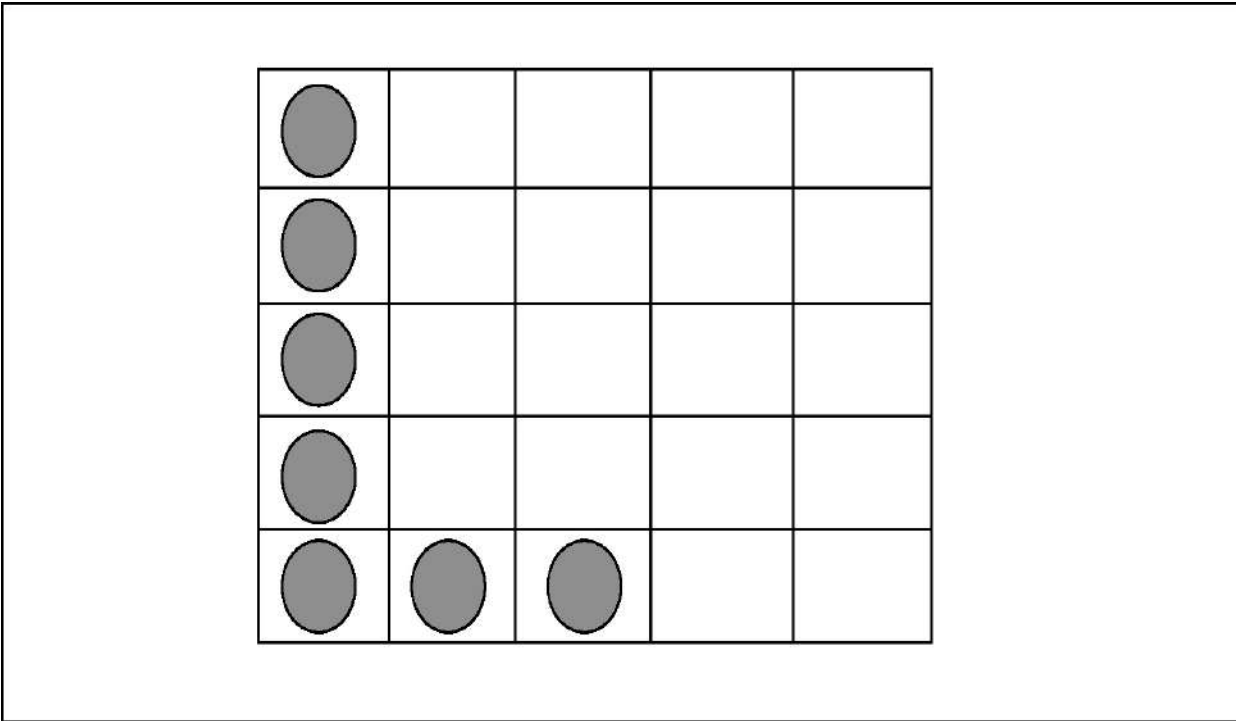
b) El dado

Lo introduciremos primero con juegos grupales, inicialmente con dados grandes, para recorridos por baldosas, por ejemplo, y después empezaremos con los juegos de mesa: la oca, el parchís, e incluso adaptaciones más sencillas de tableros en los que aparecen menor número de casillas. Como existen tantas posibilidades de juego con dados, nos limitaremos a señalar tan sólo dos ejemplos de posibles aplicaciones en el aula:

- **Carrera de dados:** Es un juego de parejas. Se tira un dado y un niño ha de moverse tantos pasos como indica el dado, su pareja va contándolos extendiendo sucesivamente los dedos de una mano. Se comprueba si coinciden los pasos con los dedos de la mano.
- **Tablero** de 25 a 50 casillas según queramos alargar la actividad. Se lanza el dado y se rellena con fichas. Se irán colocando tantas como indique el dado. Gana el jugador que rellene antes su tablero (ver [Fig. 2.7](#)).

FIGURA 2.7

JUEGO DEL TABLERO



c) Juegos de puntería

Apuntar dejando caer, lanzando o empujando objetos: bolos, anillas, soltar pinzas, dianas, tragabolas, la rana, moneda en raya, etc. Son juegos muy atractivos para los niños. El recuento de los bolos caídos o las anillas lanzadas se puede realizar con ayuda de los dedos o con marcas sobre papel, suelo o pizarra según el lugar donde vayamos a jugar (ver [Fig. 2.8](#)). Este tipo de juegos hay que utilizarlos de forma sistemática y programándolos detalladamente según el aspecto del conteo o tipo de error que se pretende superar.

FIGURA 2.8

EJEMPLO DE RECOGIDA DE PUNTOS

NIÑOS	PARTIDA BOLOS (bolas, anillas)	TOTAL
Pepe	////////	
Ramón	////////	
Anabel	/////	
Luis	////	
Sara	//////////	
Lucía	////////	
Juan	////////	

d) El ordenador en el aula de Educación Infantil

El ordenador en Educación Infantil es una herramienta valiosa y permite a los niños alcanzar unos contenidos y objetivos con un alto grado de motivación. Para el principio que nos ocupa existen en el mercado numerosos juegos que ayudarán al niño a establecer la correspondencia uno-a-uno. Sirvan como ejemplo tres juegos:

1. *Mis amigos de Fhiser Price*: Cuando el muñeco le pide ayuda para inflar globos o hacer pompas, el niño comprueba que sólo si hace clic (que sería el equivalente del señalamiento) sale en pantalla el globo o la pompa.
2. Con las *recetas de cocina del País de los juguetes* comprueba igualmente que uno a uno van apareciendo en pantalla los ingredientes que necesita sólo si hace clic.
3. En la *Casa de las matemáticas de Mili* aparecen en la caja registradora un número de animales u objetos a la vez que los enumera o nombra.

El juego con el ordenador permite desarrollar los distintos principios del conteo: se pueden construir correspondencias, enumerar objetos, cuantificar

cantidades, comparar cantidades, etc. En estas actividades existen diferentes niveles de dificultad, dependiendo frecuentemente de la longitud de la secuencia numérica.

2.3.2.2. La secuencia convencional

(Para información sobre su aprendizaje, ver 1.4.2. de esta obra.)

Las actividades y juegos de este bloque pretenden sobre todo introducir a los niños en la secuencia rítmica de palabras numéricas. En Educación Infantil muchas de las canciones y ritmos que se utilizan habitualmente incluyen un tramo de la serie numérica. Tienen la ventaja de que se pueden utilizar en diferentes espacios: en el patio, en el aula, etc. Algunas de estas actividades son:

a) Juegos para echar a SUERTES

Se caracterizan por su funcionalidad y, además, son altamente motivantes para los niños. Una vez que se introducen en el aula (con o sin marioneta) serán los propios niños los que generalicen su uso a gran número de situaciones. Se pueden utilizar para elegir quién comienza una partida determinada o para ver quién la liga en algunos juegos como el escondite. En los ejemplos que siguen se indica, entre paréntesis, el tramo numérico que se recita:

«Al pelotón» (del uno al tres); *en un café se rifa un gato, al subir por la escalera* (del uno al cuatro); *en la casa de Pinocho* (del uno al ocho); *¿Te atreves?* Pues cuenta hasta nueve; etc.

b) Canciones y poesías

Que tienen una letra con la secuencia numérica. Sirvan de ejemplo las de Margarita tiene un gato, el barquito chiquitito, un elefante, la gallina turuleta, los esqueletos, etc.

c) El escondite

Primero ya hemos dicho que se sortea entre los niños para ver quién la liga —con alguna de las retahílas señaladas anteriormente— y al que le toque tendrá que contar, con los ojos cerrados, hasta 5 o 6 o 7 o 20, en función del desarrollo de los niños.

d) A la zapatilla por detrás

Sentados en círculo, los jugadores cantan la canción mientras el niño que la liga camina alrededor de ellos y tiene que contestar a la pregunta que le formulan sus compañeros: «¿A qué hora?». Todos juntos cuentan, con los ojos cerrados, hasta el número que haya dicho y mientras deja detrás de alguno la zapatilla. Cuando terminan de contar, el niño que ha sido elegido persigue hasta que éste ocupa el lugar que ha quedado vacío.

Muy pronto los niños saben que para contar sólo se usan numerales y que, además, existe una lista de numerales únicos: la secuencia convencional. Pero no todos los niños se encuentran en el mismo nivel evolutivo, de modo que hay que adaptar los recursos o juegos didácticos recogidos aquí a sus competencias específicas sobre el principio de orden estable o secuencia de numerales.

2.3.2.3. Cardinal numérico

Hasta ahora las actividades planteadas tenían como objetivo más general la construcción de la línea numérica mental. Ahora, todas las destrezas aprendidas deben confluir en que la última palabra del recuento representa a todos los elementos del conjunto contado. Un niño puede contar bien de uno en uno hasta cinco o más y, sin embargo, cree que cada palabra («uno», «dos», «tres», etc.) corresponde a cada uno de los objetos que va tocando con el dedo, sin darse cuenta de que cada número representa también a la totalidad de los objetos ya contados. Por tanto, el objetivo que nos planteamos con las actividades y juegos de este bloque pretende que el niño llegue a saber que cada numeral representa no sólo el objeto señalado, sino también la totalidad de los objetos contados hasta ese momento.

En este sentido, son útiles e interesantes los problemas que se plantean en contextos de la vida cotidiana, tales como responder cada día, **en la**

asamblea, a la pregunta de cuántos han faltado, cuántos han venido de cada equipo, etc. El «Supermercado», las «Fiestas de Cumpleaños», las «Recetas de cocina» plantean numerosos problemas que ellos mismos quieren contestar. Igualmente, las situaciones de repartición constituyen un contexto especialmente adecuado para el uso del número, ya que tienen que pensar en la cantidad total y en la que se da a cada niño, de modo que frecuentemente los mismos niños o grupos vuelven a contar lo que tienen, lo que les queda y lo compararán con lo de los demás.

El papel del adulto en estas actividades es determinante para hacer reflexionar y estimular el pensamiento del niño, bien:

- Relanzando la pregunta, pero no dando respuestas. ¿Estás seguro de que son...? Pues tu compañero dice que son...
- Tomando o retomando las respuestas de otros niños para que expliquen cuáles son sus estrategias para averiguarlo. Y... ¿cómo lo sabes?
- Verbalizando y haciendo explícitas las explicaciones que dan los niños sobre los caminos que han seguido para estar tan seguros.

En concreto, he aquí algunas actividades que se pueden desarrollar para facilitar el aprendizaje de este principio del conteo:

- **Los juegos de adivinanzas:** Se pueden plantear para predecir la cantidad de elementos (bloques, fichas, monedas, etc.) o la tirada con dado.
- **Cascada de cartas:** El que lleva el juego deja caer de su mano un puñado de cartas dentro de un cesto. Gana el que adivina el número de cartas caídas o más cercano.
- **Agrupamientos:** Los niños permanecen de pie en el aula y el profesor pide que se agrupen en función de distintos criterios:
 - prendas del mismo color.
 - color de los ojos, del pelo.
 - con gafas, sin gafas.
 - falda, pantalón.
 - botas, deportivos.
 - pelo largo, pelo corto, etc.

Después se determina cuántos hay en cada grupo.

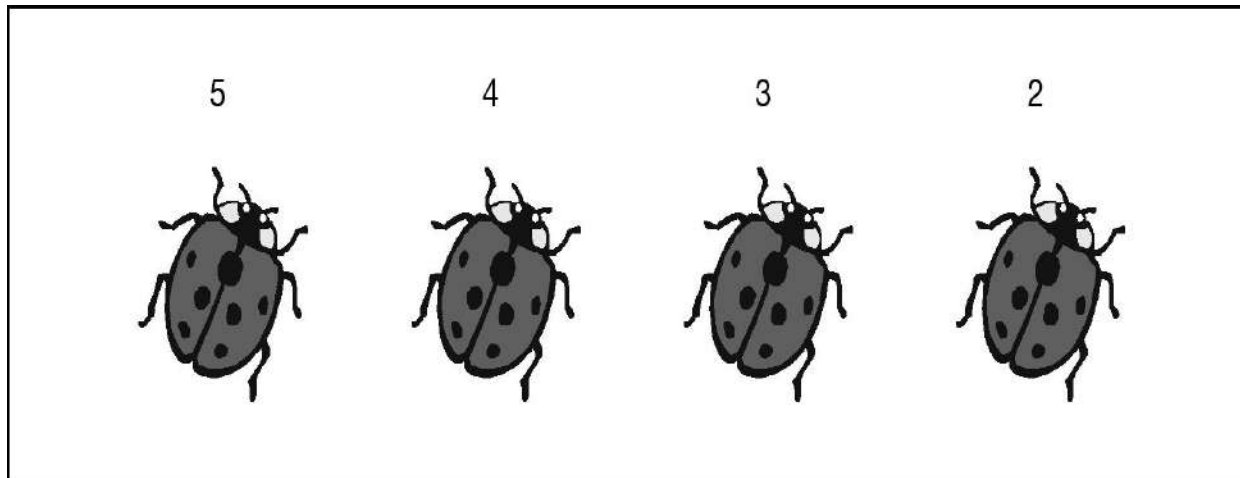
Como decíamos con las actividades del apartado 2.3.2.2, puede resultar muy útil que el maestro, o mejor aún, la propia marioneta de la clase demuestre el proceso mientras piensa en voz alta: «¿Cuántos dedos tengo levantados? Voy a contarlos: uno, dos, tres, cuatro. Vaya, el último número que he dicho es cuatro, así que tengo cuatro dedos levantados».

En la medida que adquiriera el dominio del cardinal numérico podremos introducir también nosotros errores muy evidentes para que el propio niño vaya corrigiendo a la muñeca que se equivoca y no se da cuenta.

Sería interesante introducir en la dinámica de clase actividades que nos permitan conocer si el niño realmente ha adquirido la comprensión del cardinal numérico, o si, por el contrario, se encuentra en el nivel 4 del modelo de Bermejo. Como vimos en el capítulo anterior, se pueden realizar distintas actividades, como contar hacia atrás, secuencias convencionales con omisiones, etc. En estas actividades se pregunta al niño, después de contar hacia atrás, cuántas mariquitas hay. Por ejemplo, se dice a los niños que la marioneta nos trae un problema nuevo. Propone que contemos hacia atrás, así que empezamos por el 5, y luego seguimos por el 4, 3, 2. Cuando acabamos de contar hacia atrás, tenemos que decir cuántas mariquitas hay (ver Fig. 2.9).

FIGURA 2.9

EVALUACIÓN DEL CARDINAL NUMÉRICO



De este modo conoceremos si el niño utiliza el último numeral que emplea en el conteo como respuesta mecánica, o si realmente ya se encuentra en el nivel 6 del modelo. Si dice que hay 2 mariquitas, cuando en realidad hay 4, puede crearse un conflicto cognitivo en el niño muy interesante para su desarrollo. Por tanto, este tipo de actividad resulta útil tanto para evaluar el nivel de comprensión real del niño, como para crear situaciones conflictivas.

2.3.2.4. Abstracción e irrelevancia del orden

El principio de abstracción se refiere a las características de los ítems que se cuentan. El niño atraviesa distintas fases o momentos en los que identifica diferentes tipos de unidades que sirven para contar (perceptivas, figurales, motoras, verbales). Finalmente, puede prescindir de todo tipo de características de los objetos, contando igualmente cantidades homogéneas o heterogéneas.

Cualquier tipo de actividad que consista en contar cantidades heterogéneas es útil para desarrollar este principio. Por ejemplo: un conjunto formado por manzanas y lápices.

El quinto y último principio se refiere a la irrelevancia del orden en que se cuenten los objetos. El número de objetos que hay en una hilera no cambia independientemente del orden seguido en su conteo. Sin embargo, el niño pequeño entiende que para contar bien, hay que contar de izquierdas a

derechas. Por tanto, contar de derechas a izquierdas o del centro a los extremos significa contar mal para este niño. Ello se confirma fácilmente preguntando a los niños si la equivalencia se mantiene al contar de otro modo o seguimos otro orden.

Actividades para su desarrollo:

- * Juegos de puntería o lanzamiento (de bolos, fichas); que los propios niños resuelvan el conflicto.
- * Juegos con sillas (en hilera o en círculo).
- * Colecciones de objetos (cromos de turno, los gogos, los tazos, las chapas, etc.). Existe un coleccionismo de temporada entre los niños que son muy adecuados para desarrollar los principios del conteo.

2.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS

En la vida real el niño encuentra los números en el calendario que tenemos en la pared, en el reloj, en las páginas de los libros, etc. Lo habitual es que, antes de iniciar la escolaridad, esté familiarizado con carteles, folletos publicitarios, etiquetas, etc., que tienen un contenido numérico. Por tanto, la escuela tiene que tener en cuenta estos conocimientos para integrarlos en las adquisiciones y actividades del aula. En este sentido, hay que ayudar al niño para que constate que el simbolismo formal es una expresión explícita de su conocimiento informal (gráficos, cuadros de asistencia, calendario, representación de un rincón de juego simbólico o de una tarea, etc.). Sin embargo, es aconsejable esperar hasta que el niño dota de significado cardinal a estas palabras para enseñar la relación entre grafía y palabras numéricas de manera sistemática.

Para familiarizar a los niños con los numerales se pueden utilizar distintas situaciones:

- Secuencia numérica en la pared en cartones que pueden pegar y despegar.

- En el suelo como una línea numérica en la que se pueden colocar los niños, o como una cinta métrica en la que se pueden medir.
- Números de distintos formatos y en materiales y juegos didácticos en cajas que están a su alcance.

También se puede trabajar a través de actividades específicas, sobre todo a los cinco años, como, por ejemplo:

- a) En el taller de cocina:
 - Realizar recetas y elaborar una ficha con los pasos, ingredientes, cantidades, etc.
 - Planificación de fiestas (de cumpleaños o de otro tipo) confeccionando una lista de la compra con el número de vasos, platos que necesitaremos; predecir la cantidad de comida y bebida que compraremos, etc.
- b) La lotería. (Para introducir en el rincón de juegos reglados y que se puede elaborar con los propios niños.) Los cartones de la lotería o bingo se dividen en seis, ocho o más casillas según convenga. Cada una de estas casillas tiene **números** en lugar de los dibujos que usábamos para las actividades del apartado de subitización. Un niño será el encargado de sacar la tablilla o bola con la grafía correspondiente y los niños, en sus cartones respectivos, irán tachando o tapando la que haya salido.

2.5. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EVALUACIÓN

Para evaluar la competencia del niño o su nivel de desarrollo es útil observar y recoger lo que hace y dice cuando se enfrenta a determinadas tareas. Pero la evaluación de estas tareas no debe convertirse en algo costoso y que suponga un esfuerzo extraordinario. Por ello, cada profesor puede introducir en su práctica habitual la recogida de esta información de la manera más normalizada posible, como por ejemplo:

- Cada día con el protagonista encargado en la asamblea tanto con las actividades rutinarias de contar los que han venido y los que han faltado, como con tareas específicas que se programan para ese momento (véase más abajo tareas 1, 2 y 3).
- En grupos pequeños en los rincones con propuestas y juegos que nos pueden dar información valiosa como en el Rincón de Juegos Reglados.

Las observaciones se pueden realizar en diferentes momentos, observando minuciosamente el procedimiento y los errores posibles que cometen los niños cuando cuentan: si separa los objetos contados de los que faltan por contar, si omite algún numeral, si se salta algún elemento en el conteo, por dónde empieza a contar, si emite dos palabras para el mismo objeto, etc. (ver [Tabla 2.1](#)).

TABLA 2.1

PLANTILLAS DE EVALUACIÓN PARA EL CONTEO
--

Nombre niño		Nivel educativo	Edad		
PRINCIPIOS del CONTEO				Fecha evaluac.	
1. Correspon- dencia uno a uno	Errores	Observaciones en asamblea en las tareas que realiza el encargado.			
	Espacia- les	1. Omite objetos, no los señala ni etiqueta con un numeral. 2. Señala y etiqueta más de una vez los objetos. 3. Señala y etiqueta un lugar vacío entre dos objetos.			
	Tempora- les	1. Señala correctamente el objeto pero omite la etiqueta 2. Asigna dos etiquetas a un objeto correctamente señalado. 3. Asigna etiqueta sin objeto ni señalamiento. 4. Fracciona un numeral entre dos objetos y dos señalamientos.			
	Duales	1. Asigna un número señalando más de una vez un objeto. 2. Señala dos veces un objeto sin asignarle etiqueta 3. Señala de modo irregular los objetos y dice los numerales sin conexión con los objetos ni los señalamientos. 4. Hace gesto rasante sobre los objetos y emite numerales simultáneamente y de manera continua. 5. Cuenta dos veces dos o más objetos (vuelve hacia atrás porque olvida uno y repite los dos últimos).			
2 Secuencia de numerales	a) Sabe que la lista está formada sólo por numerales. b) Sabe que tiene un orden determinado. c) Sabe que cada numeral es único y no se repite. Niveles en la elaboración de la secuencia: 1. Nivel de hilera o cuerda. Empieza necesariamente por el 1. 2. Nivel cadena irrompible. 3. Nivel cadena rompible. 4. Nivel numerales como elementos contables. 5. Nivel flexibilidad de la secuencia (adelante-atrás).				
3 Cardinal numérico	1. Incomprensión-Respuesta al azar.				
	2. Repite la secuencia de conteo.				
	3. Vuelve a contar.				
	4. «Regla del cuántos». Da el último numeral empleado.				
	5. Da el numeral mayor que ha empleado.				
	6. Respuesta correcta.				
4 Abstracción					
5. Irrelevancia del orden					

Es habitual en Educación Infantil utilizar en la asamblea una serie de tareas rutinarias para llevar a cabo la evaluación del desarrollo numérico. Las siguientes tareas pueden ser útiles para este objetivo:

Tarea 1. Principio de correspondencia uno-a-uno

Montón de objetos significativos para el niño (del proyecto o la unidad didáctica que se esté trabajando, de alguna colección que se esté haciendo, etc.). Se colocan en hilera en el suelo y se pide al niño que los cuente observando minuciosamente cómo lo hace: posibles errores.

Tarea 2: Principio de orden estable

Se disponen diferentes piezas de construcciones en la alfombra y se pide al niño que construya un tren y después que cuente las piezas que lo forman. Nos fijaremos si utiliza las palabras convencionales para contar, cuántas utiliza, en qué orden, etc.

Tarea 3: Principio del cardinal numérico

Se colocan cinco o siete objetos (tazos, cromos, gogos, etc.) según la edad, delante del niño y se le pide que diga cuántos objetos hay. Se observa qué hace y a continuación se le pide que cuente hacia atrás; se anota en qué nivel se encuentra según el modelo de Bermejo.

Con las anotaciones y observaciones de cada niño podemos ir haciendo su seguimiento a lo largo del curso.

2.6. BIBLIOGRAFÍA

Abrantes, P. (2002). *La resolución de problemas en matemáticas*. Toledo: Graó.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.

Casalta, V. (2003). *Construir un significado para los números*. Barcelona: Praxis.

Kamii, C. y DeVries, R. (1988). *Juegos colectivos en la primera enseñanza*. Madrid: Visor.

Lahora, C. (2000). *Actividades matemáticas*. Madrid: Narcea.

3

Aprendiendo a sumar y restar

V. Bermejo • M. T. Bermejo

3.1. ¿SABEN SUMAR Y RESTAR LOS BEBÉS?

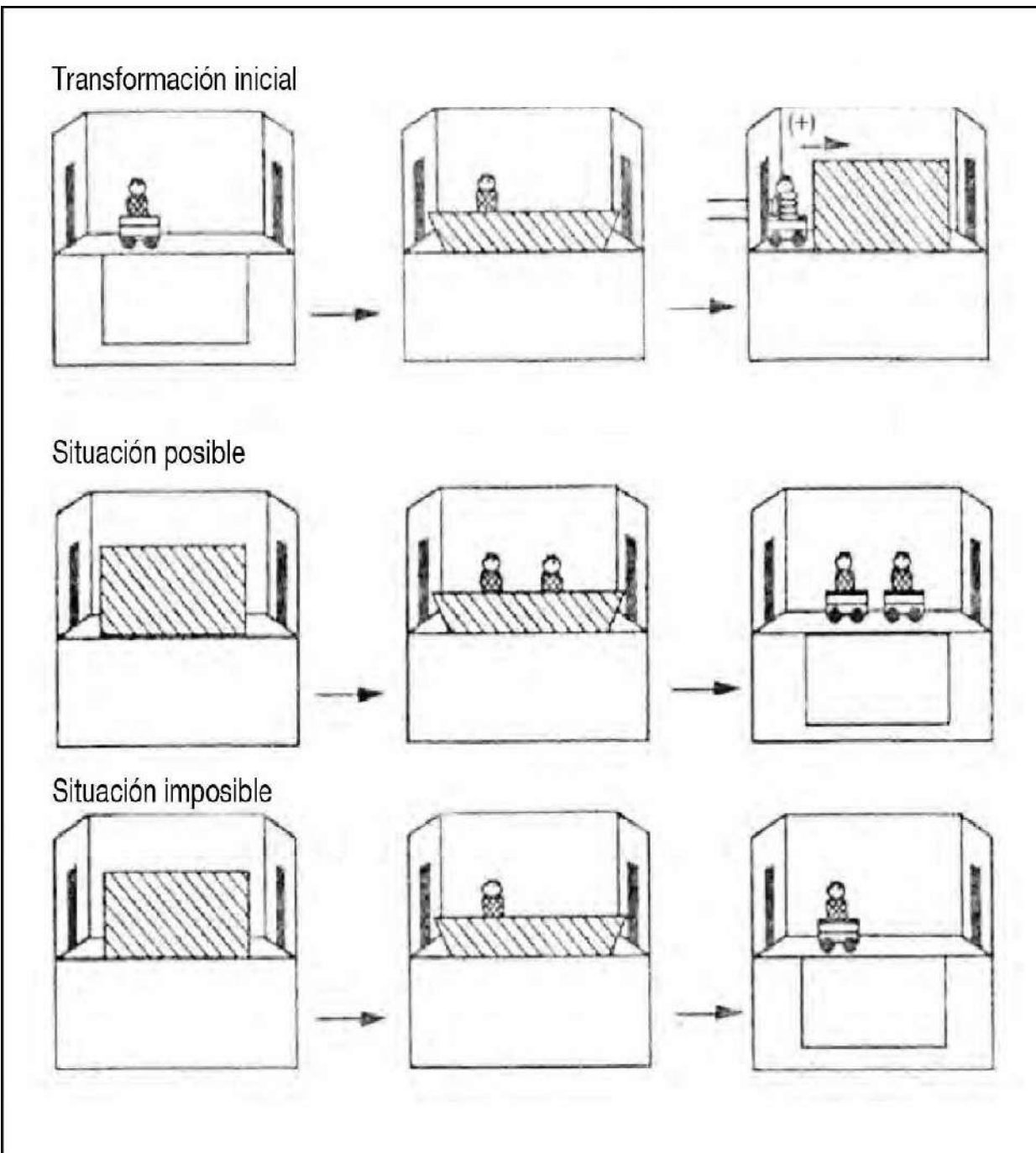
En el [capítulo 1.1](#) se ponen brevemente de relieve las altas competencias numéricas y aritméticas del niño pequeño. Así, por ejemplo, se recoge que hacia los 18 meses los niños son capaces de sumar $1 + 1$ y de restar $2 - 1$. Pero hay autores que sostienen que incluso los bebés (hacia los 5 meses) pueden llevar a cabo operaciones de sumar y restar, llegando incluso a suponer que estas competencias son innatas (Wynn, 1992). Se basan en datos obtenidos en experimentos que utilizan un dispositivo experimental similar al siguiente. Se presenta un muñeco delante del bebé en una especie de escaparate, y unos segundos después se oculta mediante una pantalla. Posteriormente aparece la mano del experimentador que añade manifiestamente ante el bebé un nuevo muñeco detrás de la pantalla. Terminada esta acción, se baja de nuevo la pantalla y pueden ocurrir dos cosas: aparecen dos muñecos ante el bebé (situación posible), o sólo un muñeco (situación imposible) (ver [Fig. 3.1](#)).

En las situaciones de restar, el procedimiento experimental es muy similar. Se presentan dos muñecos ante el bebé y posteriormente se ocultan con la pantalla. Inmediatamente después, la mano del investigador retira manifiestamente un muñeco ante la mirada del bebé. Y de nuevo, al bajar la pantalla pueden aparecer, bien un solo muñeco (resultado posible), bien dos muñecos (resultado imposible) (ver [Fig. 3.2](#)).

El experimento se basa en el paradigma de violación de expectativas, según el cual los participantes (bebés) fijan su mirada más tiempo en los resultados inesperados que en los esperados. Y efectivamente, los bebés de 5 meses miran más tiempo las situaciones imposibles que las posibles. Ello lleva a la autora a concluir que los bebés poseen la capacidad para llevar a cabo cálculos aritméticos simples.

FIGURA 3.1

PROCEDIMIENTOS EXPERIMENTALES PARA LA ADICIÓN
--

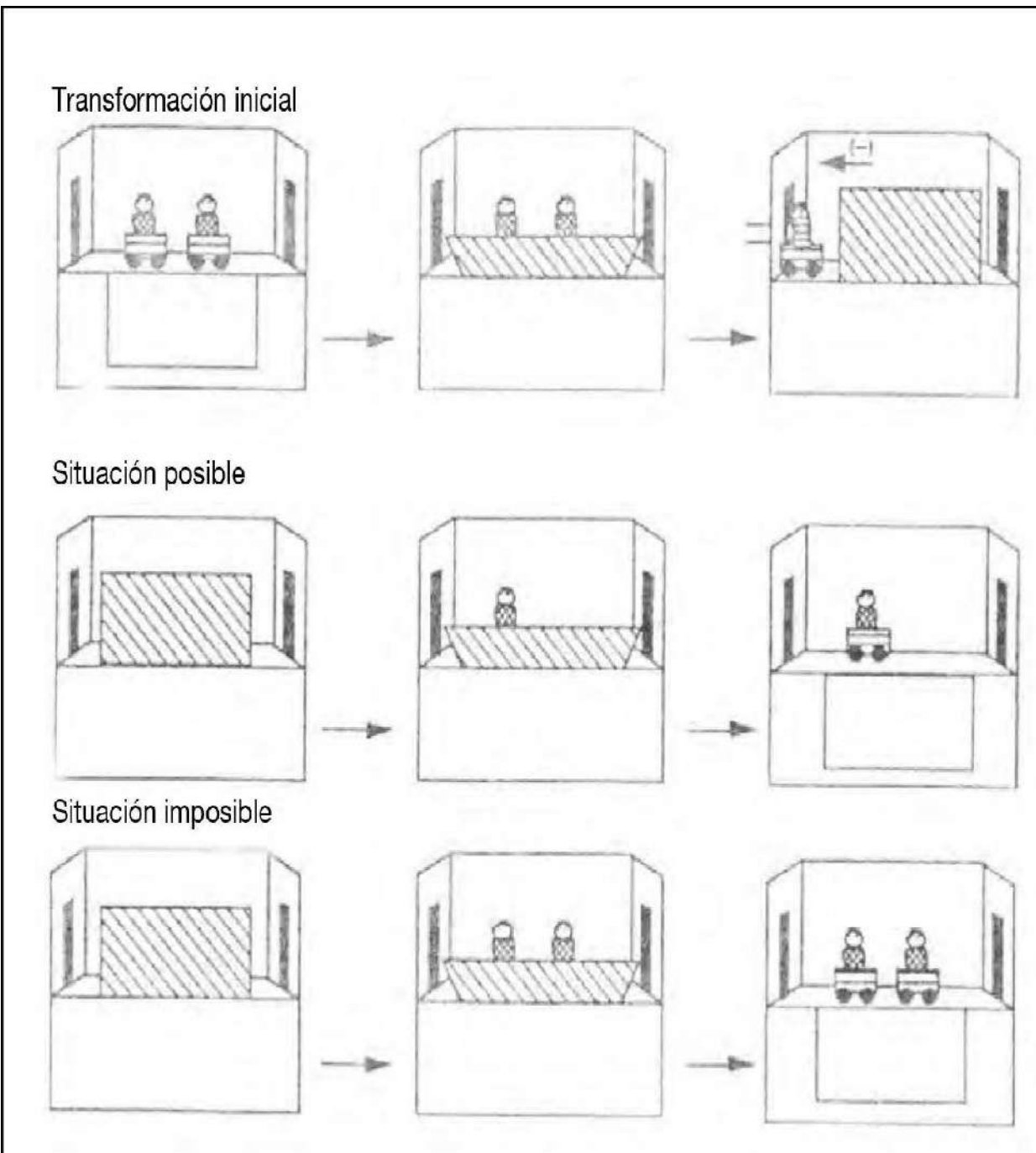


Sin embargo, diferentes autores han replicado los experimentos de Wynn encontrando resultados dispares. Unos parecen confirmar las afirmaciones de esta autora, mientras que otros niegan que los bebés puedan realizar cálculos aritméticos. Por ejemplo, Langer y colaboradores replican los experimentos de Wynn encontrando experimentalmente que los bebés de 5

meses se comportan de modo similar cuando se les presentan las situaciones: $1 + 1 = 2$ o bien $1 + 1 = 3$. Concluyen que estos bebés son sobre todo sensibles a la dirección ordinal de la transformación (añadir o quitar), pero no serían capaces de realizar cálculos precisos. Ello les lleva a suponer, con otros autores, que hasta más tarde los niños no son realmente capaces de sumar y restar con números pequeños.

FIGURA 3.2

**PROCEDIMIENTOS EXPERIMENTALES PARA LA
SUSTRACCIÓN**



3.2. CONCEPTO DE SUMA Y RESTA

Existen dos concepciones diferentes de la suma y resta: unitaria y binaria. Aunque desde ambas se llega a resultados idénticos, no obstante, las

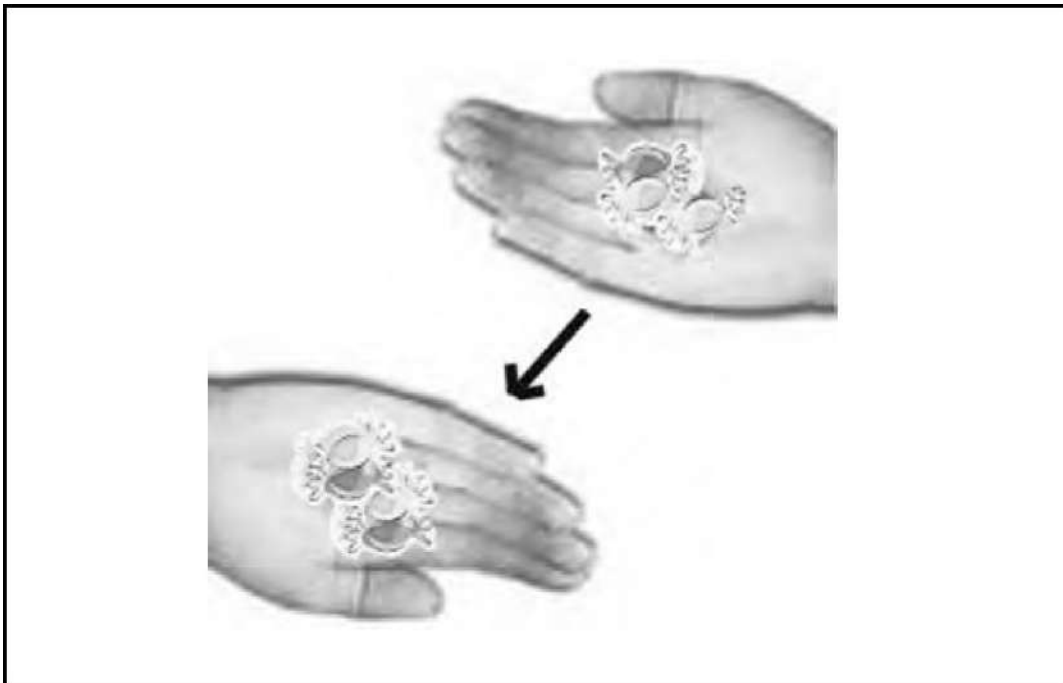
situaciones son diferentes. Efectivamente, desde la concepción unitaria se parte de un conjunto de base que es modificado añadiendo (suma) o quitando (resta) otro conjunto, dando como resultado un tercer conjunto. Así, por ejemplo, en el caso de la adición, la situación sería como sigue:

«María tiene 4 caramelos y su mamá le da 3 caramelos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora María?».

Por tanto, se parte de un conjunto determinado (4 caramelos) al que se aplica la acción de dar o añadir otro conjunto (3 caramelos). El resultado de esta acción es que ahora María tiene 7 caramelos (ver [Fig. 3.3](#)).

FIGURA 3.3

EJEMPLIFICACIÓN DE LA CONCEPCIÓN UNITARIA

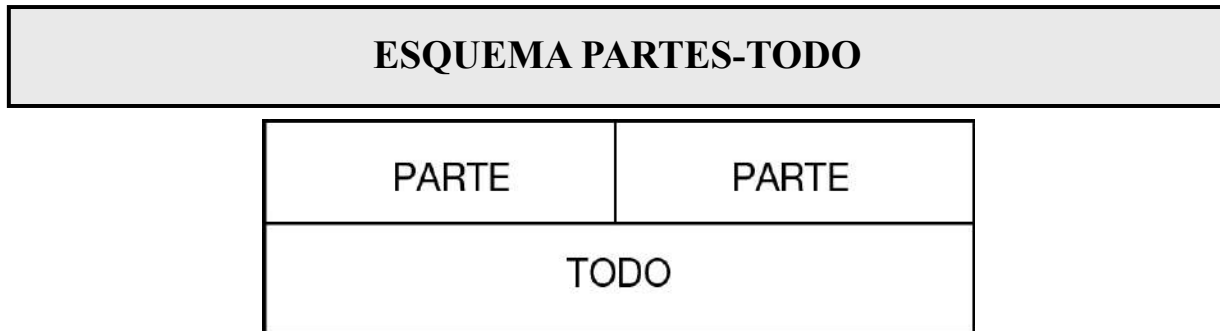


Desde la concepción binaria el planteamiento es diferente. Ahora se parte de la existencia de dos conjuntos disjuntos determinados —no un solo conjunto como en el caso anterior—, que posteriormente se unen para obtener un tercer conjunto. Así, por ejemplo:

«Cristina tiene 4 caramelos y Juan tiene 3 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?».

La concepción binaria se ajusta mejor al esquema partes-todo, ya que la combinación de las partes da lugar al todo y, por otro lado, el todo puede descomponerse en partes (ver [Fig. 3.4](#)).

FIGURA 3.4



Las diferencias entre ambas concepciones son claras, ya que en la primera hay una acción que modifica el primer conjunto mediante el segundo conjunto, mientras que en la segunda no hay acción en el planteamiento de ambos conjuntos. En el primer caso se habla de una situación dinámica y en el segundo de una situación estática. Otra diferencia reside en que desde la concepción binaria se entiende fácilmente la propiedad conmutativa de la adición ($a + b = b + a$), mientras que no puede aplicarse desde una concepción unitaria de la adición. Efectivamente, no es lo mismo decir que María tiene 4 bombones y su mamá le da 3 más, que decir que su mamá tiene 3 bombones y María le da 4 bombones más. Sin embargo, como se indica más arriba, el resultado matemático en ambas situaciones es el mismo: $4 + 3 = 7$.

Con respecto a la resta, aunque matemáticamente se puede considerar como una operación binaria, no obstante por su misma naturaleza su concepción más apropiada sería como operación unitaria. Se da una cantidad inicial y se quita después un número de elementos determinados, resultando un tercer conjunto ($a - b = c$). Por tanto, la acción de restar carecería de la propiedad conmutativa —ya que «a» y «b» no son intercambiables—, así como del carácter estable propio de la concepción binaria.

3.3. PROBLEMAS VERBALES

El aprendizaje significativo facilita considerablemente la adquisición de los contenidos escolares. Por ello, aunque a veces resulta imprescindible el aprendizaje mecánico y memorístico, no obstante, hay que buscar en todo momento que el aprendizaje de los alumnos en el aula sea significativo. Ello supone, al menos, dos cosas. Por una parte, que los contenidos del aprendizaje estén relacionados con los conocimientos adquiridos anteriormente por los niños, de modo que no se aborden como algo completamente nuevo. Y en segundo lugar, que el proceso de aprendizaje se lleve a cabo en un contexto familiar, atractivo y relacionado, si es posible, con situaciones extraescolares de los niños. No es bueno que los niños hagan unas matemáticas en la calle completamente diferentes de las matemáticas que hacen en el aula, como solía ocurrir frecuentemente en el pasado. Ello causaba una cierta esquizofrenia en el niño que no favorecía en absoluto un desarrollo integrado y armónico.

Por otra parte, sabemos que antes de la enseñanza formal de la suma y la resta, los niños son capaces de resolver múltiples problemas y situaciones de suma y resta, e incluso de multiplicación y división. Pero estos escolares de Educación Infantil resuelven esos problemas mediante el uso del conteo y de objetos, y no mediante la utilización del algoritmo, cuyo significado no llegan aún a comprender. En consecuencia, parece razonable que la enseñanza-aprendizaje de las operaciones de sumar y restar se inicie mediante el uso de problemas verbales (PV), y no mediante el algoritmo. Efectivamente, el siguiente problema:

«Juan tiene 3 canicas y ha ganado 2 más. ¿Cuántas canicas tiene ahora?».

presenta un grado de significación muy alto para niños que suelen jugar a las canicas. En cambio, carece de significado el aprendizaje del algoritmo descarnado ($3 + 2 = ?$) y extraño al contexto cotidiano y familiar del niño. Como escriben Ginsburg y otros (1998), los PV «ofrecen contextos del mundo real que presumiblemente motivan a los niños y les facilitan la aplicación de sus habilidades matemáticas». Igualmente, el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) se pronunciaba ya en 1980, e insiste después en 1989, sobre la importancia de los PV en la enseñanza de las

operaciones aritméticas. Y en general, existe un consenso unánime entre los investigadores sobre la prioridad de los PV con respecto al algoritmo.

Ahora bien, los PV de una sola operación contienen dos partes: informativa y la pregunta, así como tres cantidades, de las que dos se ofrecen en la parte informativa y a la tercera se hace referencia en la pregunta, tal como puede observarse en el ejemplo anterior.

Por otra parte, los PV se suelen diferenciar en función de la estructura semántica y la ubicación de la incógnita. La estructura semántica se refiere a si existe o no acción en el enunciado verbal del problema, o si las relaciones entre los actantes son dinámicas o estáticas. En el siguiente ejemplo hay acción:

*«Luis tiene 6 canicas. Antonio **le da** 3 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene Luis ahora?».*

En cambio, la situación es estática en el siguiente PV:

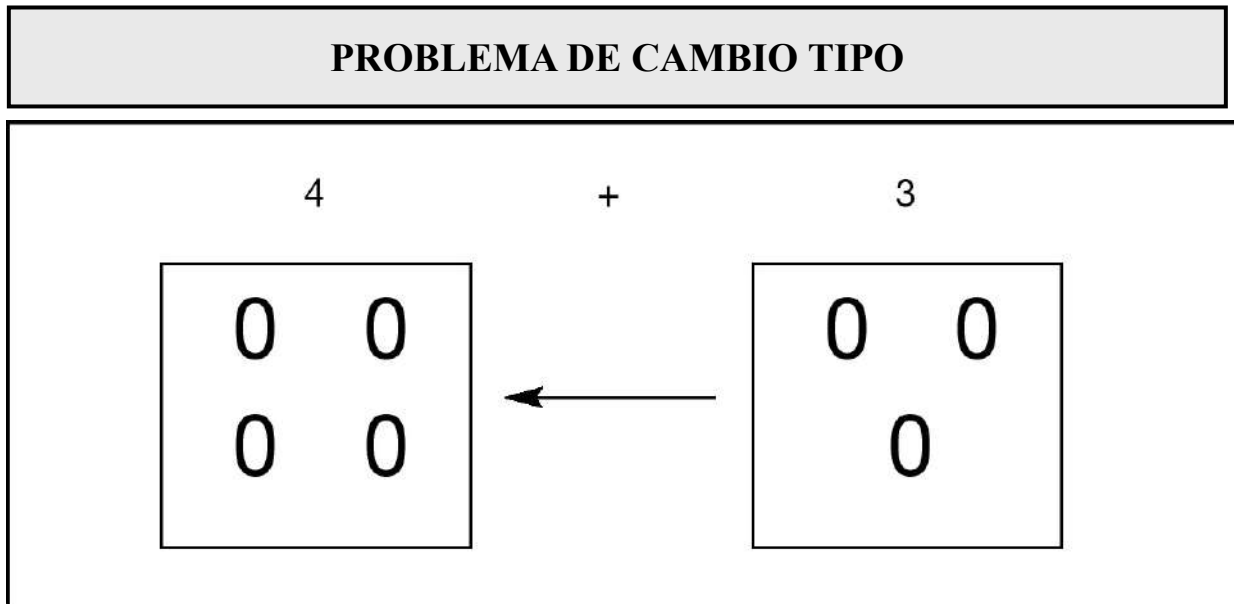
«María tiene 4 bombones e Isabel tiene 3 bombones. ¿Cuántos bombones tienen entre las dos?».

Igualmente, la ubicación de la incógnita es otra de las variables utilizadas para diferenciar los distintos PV. Atendiendo, pues, tanto a la estructura semántica, como a la ubicación de la incógnita se han propuesto diferentes categorías de PV de sumar y restar. He aquí las más frecuentes (ver Bermejo y otros, 2002).

3.3.1. Problemas verbales de cambio

Estos problemas consisten en partir de una cantidad inicial, que será después modificada por otra, dando lugar a un resultado nuevo. Si la acción presente en el problema consiste en añadir, estaremos hablando de un problema aditivo; mientras que si la acción implica un decremento en la cantidad inicial, se trata entonces de un problema de restar. Igualmente, la ubicación de la incógnita determinará el tipo de formulación del problema, así como la dificultad de los mismos. Gráficamente podríamos representar un problema de cambio tipo tal como aparece en la [Figura 3.5](#).

FIGURA 3.5



Teniendo en cuenta la ubicación de la incógnita ($a + b = ?$, $a + ? = c$ y $? + b = c$) y si la acción implica incremento (adición) o decremento (sustracción), se pueden diferenciar seis tipos de PV de cambio:

- 1) *Mario tenía 4 lápices. Elena le dio 3 lápices más. ¿Cuántos lápices tiene ahora Mario?*
- 2) *Mario tenía 3 lápices. Elena le dio unos cuantos más. Si ahora Mario tiene 7 lápices. ¿Cuántos lápices le dio Elena?*
- 3) *Mario tenía unos cuantos lápices. Elena le da 3 lápices más. Ahora Mario tiene 7 lápices. ¿Cuántos lápices tenía al principio?*
- 4) *Mario tiene 7 lápices y da 3 a Elena. ¿Cuántos lápices le quedan a Mario?*
- 5) *Mario tenía 7 lápices y da algunos a Elena. Ahora le quedan 3 lápices. ¿Cuántos lápices dio a Elena?*
- 6) *Mario tenía una caja de lápices. Dio 3 lápices a Elena. Ahora le quedan 4 lápices. ¿Cuántos lápices había en la caja?*

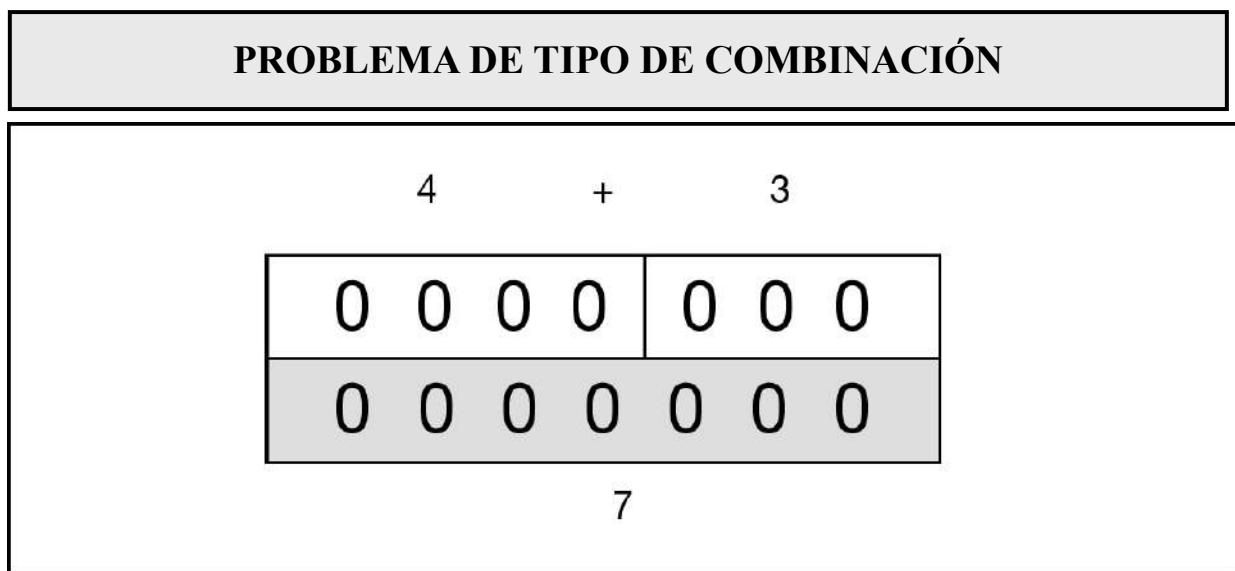
Aunque las operaciones numéricas implicadas sean idénticas en los diferentes PV mencionados, es decir, en todos la cuenta a ejecutar consiste en resolver $4 + 3 = 7$ o $7 - 3 = 4$ o similar; sin embargo, la dificultad que

encuentran los niños en las diferentes categorías no es la misma, como veremos.

3.3.2. Problemas verbales de combinación

La característica peculiar de estos PV reside en que se parte de dos conjuntos que el solucionador del problema une mental o físicamente para encontrar el resultado final. Constituye, además, el ejemplo más claro del esquema partes-todo, es decir, dos partes forman un todo y el todo puede descomponerse igualmente en sus partes. Gráficamente se pueden representar estos problemas tal como aparece en la [Figura 3.6](#), en la que hay dos partes que unidas forman el todo ($4 + 3 = 7$).

FIGURA 3.6



En cuanto a los tipos de PV de combinación, hay que anotar que sólo existen tres categorías, y las tres son aditivas, ya que la noción de combinar es contraria a la idea de sustracción. La primera consiste en proponer dos conjuntos y preguntarse por el resultado de la unión de los mismos:

- 1) *María tiene 4 caramelos y Juan tiene 5 caramelos. ¿Cuántos caramelos tienen entre los dos?*

La segunda y tercera categorías llevan la incógnita en una de las partes:

- 2) *En un prado hay 6 vacas pastando, 4 son negras y el resto blancas. ¿Cuántas vacas blancas hay?*
- 3) *En clase hay 7 escolares esperando al profesor. Algunos son chicos y 3 son chicas. ¿Cuántos chicos hay?*

3.3.3. Problemas verbales de comparación

Este tipo de problemas plantea relaciones estáticas entre los conjuntos que los constituyen. Su característica peculiar, que los diferencia de los PV de combinación, reside en la existencia de una comparación. La incógnita puede situarse, bien en la diferencia entre los dos conjuntos comparados, bien en el conjunto referente, bien en el conjunto de comparación. Por otra parte, la comparación establecida puede adoptar la fórmula «más que» o «menos que», dando lugar a diferentes categorías de problemas, según implique aumento o disminución. Cuando conlleva **aumento**, pueden formarse las siguientes categorías:

- 1) (Diferencia desconocida): *Ana tiene 5 lápices y Pedro tiene 3 lápices. ¿Cuántos lápices tiene Ana más que Pedro?*
- 2) (Referente desconocido): *Ana tiene 6 lápices. Tiene 2 más que Pedro. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?*
- 3) (Comparación desconocida) *Ana tiene 4 lápices. Pedro tiene 3 lápices más que Ana. ¿Cuántos lápices tiene Pedro?*

Si la relación planteada en el problema supone **disminución**, entonces se pueden formar igualmente las siguientes categorías:

- 4) (Diferencia desconocida): *Ana tiene 3 globos. Pedro tiene 7 globos. ¿Cuántos globos tiene Ana menos que Pedro?*
- 5) (Referente desconocido): *Ana tiene 5 globos. Tiene 2 menos que Pedro. ¿Cuántos globos tiene Pedro?*
- 6) (Comparación desconocida): *Ana tiene 8 globos. Pedro tiene 3 menos que Ana. ¿Cuántos globos tiene Pedro?*

Como veremos más adelante, los PV de comparación, especialmente algunos de ellos, suelen presentar mayor dificultad a los niños que el resto de las categorías mencionadas anteriormente.

3.3.4. Problemas verbales de igualación

Si en los problemas de comparación las dos cantidades iniciales permanecen invariables en la resolución de los mismos, en los PV de igualación se da una acción que pretende igualar las dos cantidades propuestas, modificando una de ellas. Por ello, en estas situaciones se establecen relaciones dinámicas, mientras que en los PV de comparación las relaciones existentes son estáticas. Según esto, se pueden enunciar de nuevo seis tipos de problemas en función de la ubicación de la incógnita y del tipo de transformación implicada: incremento o disminución para igualar los dos conjuntos dados.

- 1) (Igualación desconocida): *Luis tiene 7 cromos y Ángel tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos necesita Ángel para tener los mismos que Luis?*
- 2) (Igualar conjunto conocido): *Luis tiene 4 cromos. Si le dan 3 cromos más tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Ángel?*
- 3) (Igualar conjunto desconocido): *Ángel tiene 8 cromos. Si a Luis le diesen 3 cromos más tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos tiene Luis?*

Los siguientes PV suponen disminución de una de las cantidades para igualarla con la otra:

- 4) (Igualación desconocida): *Ángel tiene 7 cromos y Luis tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos debería perder Ángel para tener los mismos que Luis?*
- 5) (Igualar conjunto conocido): *Ángel tiene 7 cromos. Si perdiese 3 cromos tendría los mismos que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?*
- 6) (Igualar conjunto desconocido): *Ángel tiene 4 cromos. Si Luis perdiese 5 cromos tendría los mismos que Ángel. ¿Cuántos cromos*

tiene Luis?

Los tipos de PV recogidos son los que frecuentemente suelen proponer los autores. Existen, no obstante, otras tipologías que han obtenido un respaldo minoritario o escaso (ver para más información Bermejo y otros, 2002). Concluyendo, hemos utilizado tres criterios principales para clasificar los PV propuestos:

- a) Las relaciones implicadas en los PV pueden ser dinámicas o estáticas.
- b) La ubicación de la incógnita.
- c) Las situaciones planteadas pueden suponer incremento o disminución.

3.4. DIFICULTAD DE LOS PROBLEMAS VERBALES

La dificultad de los PV no es la misma para todos, sino diversa, a pesar de que los cálculos que suponen sean similares o idénticos. Si las cantidades utilizadas son bajas, estas diferencias de dificultad se explicarían principalmente en función de tres factores:

- a) Estructura semántica del problema.
- b) Lugar ocupado por la incógnita.
- c) Formulación verbal del problema.

Teniendo en cuenta el primer factor, hemos encontrado que en general los problemas de cambio serían los más sencillos, debido probablemente a que su estructura se fundamenta en una concepción unitaria de estas operaciones. Después seguirían en dificultad muy cerca los problemas de combinación. Los PV de igualdad serían un poco más difíciles y los de comparación entrañarían incluso mayor dificultad. Ahora bien, estos datos deben matizarse en función del segundo factor: ubicación de la incógnita. Efectivamente, el éxito de los niños suele ser mayor cuando la incógnita se ubica en el resultado, a veces incluso independientemente del tipo de problema planteado (ejemplo algorítmico: $a + b = ?$). En cambio, la

dificultad se incrementa cuando el término desconocido se sitúa en el segundo sumando o término de la operación ($a + ? = c$); y sobre todo, la dificultad es máxima cuando el término desconocido es el primero ($? + b = c$).

Finalmente, la formulación verbal del problema puede también facilitar o dificultar la solución del mismo. La manera y el grado en que se explicitan en el texto las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, así como el orden de presentación de la información puede ser una ayuda o un obstáculo para resolver el problema. Por ejemplo, si se presentan en un dibujo 5 pájaros y 3 gusanos y preguntamos al niño «¿cuántos pájaros hay más que gusanos?», los niños presentan más dificultad ante esta pregunta que si se reformula el problema de la manera siguiente: «imagina que cada pájaro va corriendo a coger su gusano, ¿cuántos pájaros se quedarían sin gusano?».

Por otra parte, existen otras variables generales que pueden mediar también en la correcta resolución de los problemas, tales como la presencia de ayudas o representación de los sumandos-términos y la magnitud de los mismos. Así, las investigaciones muestran que el uso de objetos o dibujos mejoran manifiestamente los resultados de los niños más jóvenes. Igualmente, hemos encontrado que sobre todo para los niños de Educación Infantil el tamaño relativo de los sumandos influye en el éxito de los mismos. La dificultad disminuye cuando el segundo sumando es menor que el primero; se incrementa cuando ambos sumandos son iguales (en general), y aún resulta más difícil cuando el segundo sumando es mayor que el primero.

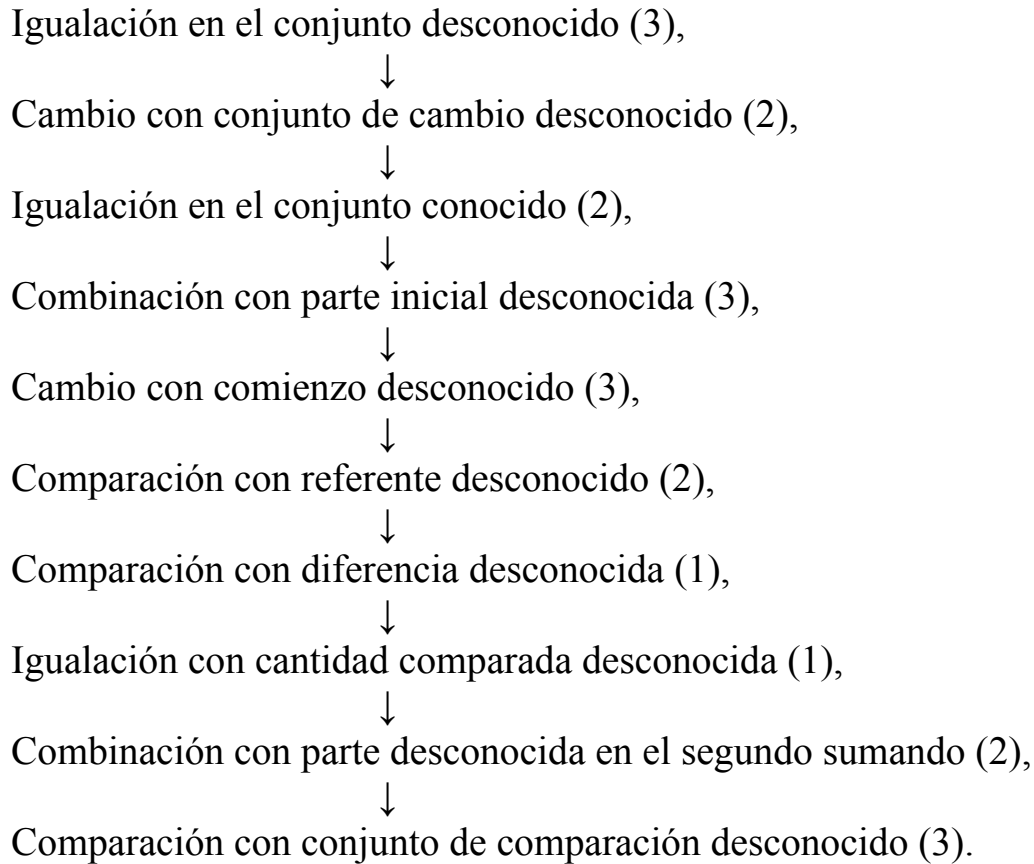
Especificando aún más, hemos encontrado un *ranking* de dificultad de los diferentes PV aditivos mencionados más arriba (ver Bermejo y otros, 2002). Para ello, pasamos diferentes pruebas a 72 niños/as de edades comprendidas entre 5 y 8 años. Para jerarquizar estos problemas hemos utilizado estadísticamente el escalograma de Guttman, apareciendo el siguiente orden de menos a más dificultad:

Combinación con conjunto total desconocido (1),



Cambio con resultado desconocido (1),





Por tanto, este sería el orden de aprendizaje más ajustado al desarrollo infantil para enseñar los PV aditivos. Probablemente, el orden sería el mismo para los PV de sustracción. Pero como puede observarse, ni la estructura semántica del problema determina por sí misma la dificultad del mismo, como tampoco lo hace la ubicación de la incógnita. El hecho de que en un problema haya acción, por ejemplo, no garantiza necesariamente que sea más fácil que otros problemas con relaciones estáticas. E igualmente, la ubicación de la incógnita en el resultado o tercer término tampoco implica total seguridad de que sea más fácil que otro problema con la incógnita ubicada en otro de los términos.

3.5. ESTRATEGIAS INFANTILES

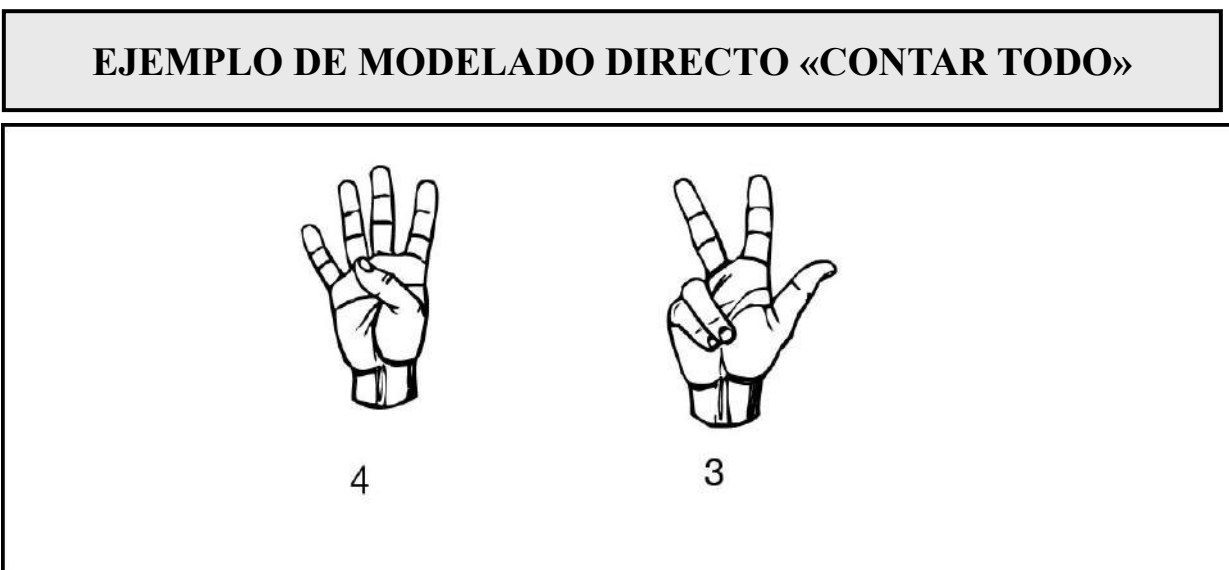
Aunque a veces no resulta fácil conocer las estrategias que utilizan los niños para resolver los problemas que se les plantean, no obstante, observando sus

acciones sobre los objetos o sus dedos, vigilando atentamente sus modos de contar, o simplemente pidiéndoles que expliquen cómo han resuelto las tareas planteadas, podemos encontrar una gran variedad de estrategias que muchas veces no han sido enseñadas por los adultos. En general podemos encasillar estas estrategias en cuatro categorías:

- 1) Modelado directo.
- 2) Conteo.
- 3) Hechos numéricos conocidos.
- 4) Hechos numéricos derivados.

1. *Modelado directo*. Es la primera estrategia que suelen emplear los niños y consiste en utilizar objetos o dedos para representar los dos sumandos. Una de las estrategias más frecuentes es «*contar todo con modelos*», y consiste en representar ambos conjuntos o términos con objetos o dedos y recontar después estos objetos. Así, por ejemplo, ante el problema aditivo de $4 + 3$, el niño representa el 4 con los dedos de una mano contando 1, 2, 3 y 4; y con la otra mano representa igualmente el segundo sumando. Posteriormente cuenta todos los dedos alcanzando el resultado final (ver [Fig. 3.7](#)).

FIGURA 3.7



Otras veces, se representan uno o los dos sumandos sin contar, es decir, mediante subitización o percepción inmediata, contando después los objetos que representan los dos sumandos. O incluso se llega al resultado final sin contar, más bien mediante subitización, si las cantidades son pequeñas. Aunque a veces se han propuesto el uso de objetos y el uso de dedos como dos estrategias diferentes evolutivamente hablando, sin embargo, se suelen dar al mismo tiempo para representar los sumandos. Cuando el uso de los dedos se hace, no para representar los dos sumandos, sino como una ayuda para llevar a cabo la estrategia de contar, entonces este procedimiento de los dedos es posterior y pertenecería a la estrategia siguiente.

2. *Estrategias de conteo.* Este procedimiento suele aparecer al final de la EI o principios de 1º de EP. La esencia de esta estrategia reside en el conteo, aunque a veces puede acompañarse con el uso de objetos o dedos para registrar los pasos que se dan. Pero nunca se pretende representar los sumandos con ellos. Por eso suele llamarse a esta estrategia «*contar sin modelos*», entendido el término «modelos» como objetos o dedos. Esta estrategia es similar a la estrategia «contar todo con modelos», en el sentido de que el niño cuenta todo para llegar al resultado final. Otras estrategias de conteo más evolucionadas, y por tanto más eficientes, serían «*contar a partir del primer sumando*» y «*contar a partir del sumando mayor*». En el primer caso los niños inician su conteo a partir del cardinal que representa el primer sumando, contando después el segundo sumando. Ejemplo: ante la suma $4 + 2$, el niño dice 4 y después continúa 5 y 6. En cambio, en el segundo caso se cuenta a partir del sumando mayor, sea éste el primero o el segundo.

3. *Hechos conocidos.* Son aquellas estrategias basadas en la memorización. El resultado de la operación propuesta se recupera inmediatamente de la memoria a largo plazo, sin contar o aplicar otro tipo de procedimiento. Aunque no está suficientemente clarificado el proceso mental de este tipo de estrategia, parece ser que los procesos reproductivos estarían en la base de estos hechos numéricos. La recuperación del resultado suele ser más fácil y rápida en la suma de los «dobles» que en la suma de números similares diferentes ($5 + 5$ o $3 + 3$).

4. *Hechos numéricos derivados.* Esta estrategia supone más bien procesos reconstructivos similares a la composición y descomposición de los números. Efectivamente, el niño puede utilizar estos procedimientos para hallar el resultado final de una operación, como por ejemplo ante la cuenta 6

+ 5. Este niño suele decir, «como sé que $5 + 5$ son 10, añadido uno y son 11». Estas estrategias son en general más tardías que las precedentes, aunque si las cantidades son pequeñas pueden solaparse en el tiempo con las anteriores, sobre todo con las de conteo. En este sentido, resultan especialmente sencillas las combinaciones de «*los dobles más/menos uno*», como hemos visto; así como también «*los dobles más/menos dos*»: $7 + 5 = (5 + 5) + 2 = 10 + 2$, y «*las compensaciones*»: $9 + 7 = (9 - 1) + (7 + 1)$.

Por otra parte, es interesante conocer qué estrategias emplean los niños ante los diferentes PV. Sabemos que no siempre utilizan la misma estrategia para resolver los distintos PV, sino que frecuentemente la estrategia empleada va a depender del tipo de problema y del nivel escolar. Por ello, presentamos a continuación, de manera sucinta, las principales estrategias utilizadas por los niños de Educación Infantil (5-6 años) y de 1º y 2º de Educación Primaria en cada uno de los PV señalados más arriba (ver para más detalles Bermejo y otros, 2002).

Problemas de cambio 1:

EI: «contar todo».

EP: «contar a partir de uno de los sumandos».

Problemas de cambio 2:

EI y EP: «contar hasta» (contar desde uno de los sumandos hasta llegar al resultado).

Problemas de cambio 3:

EI: «ensayo y error».

EP: «contar hacia atrás» (desde el término mayor) y «contar hasta» (desde el término menor).

Problemas de cambio 4:

EI y EP (1º): «quitar de» (separar elementos del minuendo tantos como indica el sustraendo; los elementos restantes sería el resultado de la operación).

EP (2º): «memorísticas».

Problemas de cambio 5:

EI y EP: «contar hasta».

Problemas de cambio 6:

EI y EP: «contar a partir de uno de los términos».

En cuanto a los problemas de combinación, las estrategias suelen ser bastante similares en los tres grupos.

Problemas de combinación 1:

EI: «contar todo».

EP: «contar a partir de uno de los sumandos».

Problemas de combinación 2 y 3:

EI y EP: «contar hasta».

En los problemas de comparación existe mayor variedad en el uso de estrategias para resolver los problemas planteados.

Problemas de comparación 1:

EI: «contar a partir de uno de los sumandos».

EP: «contar hasta».

Problemas de comparación 2:

EI: «quitar de» y «contar hasta».

EP (1°): «quitar a».

EP (2°): «contar hacia atrás».

Problemas de comparación 3:

EI: «contar a partir de uno de los sumandos».

EP (1°): «contar hacia atrás».

EP (2°): «contar a partir de uno de los sumandos» y «memorísticas».

Problemas de comparación 4:

EI y EP: «contar hacia atrás».

Problemas de comparación 5:

EI: «contar a partir de uno de los términos».

EP (1°): «memorísticas».

EP (2°): «contar hacia atrás».

Problemas de comparación 6:

IE: «contar hacia atrás».

EP (1°): «contar hacia atrás» y «memorísticas».

EP (2°): «memorísticas».

Problemas de igualdad 1:

EI: «contar todo».

EP (1°): «contar hasta».

EP (2°): «contar a partir de uno de los sumandos».

Problemas de igualdad 2:

EI y EP: «contar a partir de uno de los sumandos».

Problemas de igualdad 3:

EI: «contar hacia atrás hasta».

EP: «contar hasta».

Problemas de igualdad 4:

EI y EP (1°): «quitar a».

EP (2°): «memorísticas».

Problemas de igualdad 5:

EI: «quitar de».

EP (1°): «contar a partir de uno de los sumandos».

EP (2°): «contar a partir de uno de los sumandos» y «quitar a».

Problemas de igualdad 6:

EI y EP (1°): «contar a partir de uno de los sumandos».

EP (2°): «contar hacia atrás hasta» y «memorísticas».

Aunque hemos mencionado hasta aquí las estrategias empleadas más frecuentemente por los niños en cada uno de los PV de suma y resta, sin embargo, conviene resaltar que no todos los escolares utilizan las mismas estrategias. Al contrario, ante un mismo problema suelen aparecer diferentes estrategias, incluso en los niños del mismo nivel escolar.

3.6. ERRORES TÍPICOS

Aquí recogemos solamente los errores cometidos por los niños en la resolución de los PV. Los errores referidos a la resolución del algoritmo de sumar y restar se estudiarán en el [capítulo 9](#).

Los errores típicos infantiles más frecuentes son los siguientes.

1) **Repiten una de las cantidades propuestas en el problema.** Este tipo de error se debe fundamentalmente a la falta de comprensión de la relación partes-todo y a la dificultad para representarse adecuadamente el problema planteado. Así, por ejemplo, algunos niños interpretan una proposición comparativa como una proposición de asignación, como ocurre cuando ante la expresión «Pedro tiene 3 lápices más que Javier», el niño concluye que «Pedro tiene 3 lápices».

2) **Palabras clave.** Este tipo de error aparece cuando, en vez de tratar de comprender el problema, el niño se limita a interpretar determinadas palabras clave para decidir el tipo de operación que hay que realizar para resolver el problema planteado. Así, cuando aparecen en el texto palabras como «más», «añadir» o «combinar», concluyen sin más que se trata de un problema aditivo aplicando la operación de sumar. E igualmente, cuando aparecen términos como «quitar», «separar», etc., estos niños concluyen sin prestar más atención que se trata de un problema de restar, cuando quizá la estructura semántica del problema sea otra. Por ejemplo:

*«Pedro tiene 9 lápices. Tiene 4 **más** que María. ¿Cuántos lápices tiene María?».*

Hay niños que al leer el término «más» se limitan a sumar $9 + 4$. A este error subyace no sólo una incapacidad para representar adecuadamente los términos del problema, sino frecuentemente también una práctica instruccional desacertada. De hecho es muy poco frecuente que este error aparezca en EI.

3) **Transformación del problema.** Consiste en convertir un problema no-canónico en su forma canónica, que suele ser más fácil. Así, cuando en el PV se ubica la incógnita en el primero o segundo término ($? + b = c$ o $a + ? = c$), el niño resuelve el problema como si la incógnita estuviera en el resultado o tercer término ($a + b = ?$). Una vez más, este error se debe a la formación de una representación semántica inadecuada del problema.

4) **Inventar la respuesta.** Se da sobre todo en los niños más jóvenes y suele aparecer ante la incapacidad del niño para comprender el problema, o incluso cuando está cansado.

Aunque existen otros errores infantiles, estos suelen ser los más frecuentes.

Por otra parte, los errores cometidos por los niños no están relacionados con los diferentes tipos de PV, ya que suelen cometer los mismos errores en las distintas categorías de PV. En cambio, los errores sí están relacionados con los niveles escolares, de modo que los distintos cursos cometen sus propios errores. Así, en EI suelen aparecer sobre todo los errores de «inventar la respuesta» y «repetir una de las cantidades». En 1º de EP los errores más característicos consisten en «inventar la respuesta» y «palabras clave». Finalmente, en 2º de EP predominan los errores de «transformar el problema» y «palabras clave».

3.7. DESARROLLO DE LA CAPACIDAD DE SUMAR Y RESTAR

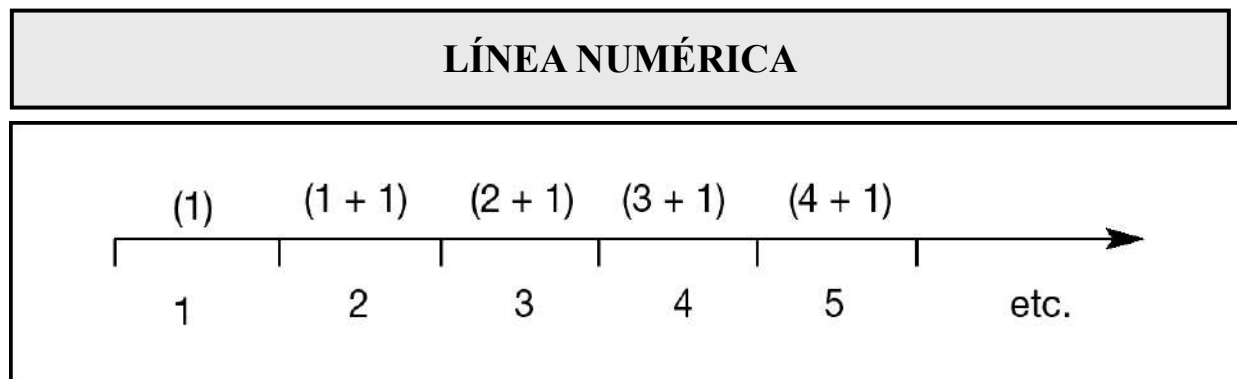
Teniendo en cuenta la doble conceptualización de la adición como operación unitaria o binaria, visto anteriormente, a veces se ha supuesto que el niño adquiriría primero la adición entendida como operación unitaria, y sólo más tarde entendería igualmente la adición como operación binaria. Es cierto que no hay suficientes datos empíricos que confirmen esta suposición, pero aunque puedan solaparse ambas concepciones a lo largo del desarrollo infantil, sí parece más asequible para el niño pequeño la concepción unitaria que la binaria. De hecho, en los estudios con bebés y niños pequeños suelen emplearse tareas diseñadas desde la concepción unitaria. Por tanto, sería conveniente iniciar el aprendizaje de la adición y sustracción desde esta concepción, pasando más tarde a plantear situaciones binarias.

Resnick (1983) propone tres niveles de desarrollo:

Nivel I: Es propio del escolar perteneciente a EI. Se caracterizaría fundamentalmente por el uso del conteo y la comparación de cantidades.

Estos niños poseen una representación numérica semejante a una secuencia mental o línea numérica en la que los números aparecen vinculados entre sí por la relación «siguiente» ($N + 1$) y existe, además, una dirección en esta línea o cadena que indica que los números posteriores son mayores que los anteriores. Ello permite al niño saber que 5 es el «siguiente» del 4 y anterior al 6 (ver Fig. 3.8).

FIGURA 3.8



Nivel II: Corresponde al período inicial de la EP. Lo más sobresaliente de este momento evolutivo es la adquisición del esquema partes-todo. Ello permite al niño la comprensión del número como compuesto por otros números, o que cualquier cantidad puede dividirse en partes, de modo que la suma de las partes es igual al todo ($8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 4 + 4 = 3 + 3 + 2 = \dots$). La posesión de este esquema facilita en gran medida el aprendizaje de la suma y resta. La primera operación consiste precisamente en la composición de dos números o cantidades que dan lugar a un tercer número ($a + b = c$); mientras que la resta tiene sus fundamentos en la descomposición numérica: un número o cantidad puede descomponerse en dos números o cantidades ($a - b = c$).

Nivel III: Aparece más tarde en EP. Su componente más relevante es la adquisición de la numeración decimal, que surge de la elaboración del esquema partes-todo. Según esta autora, habría tres fases en el desarrollo de la numeración decimal. En la primera, el niño es capaz de representarse los números como compuestos por decenas y unidades. Así, el número 86 aparece como compuesto de $80 + 6$, es decir, formado por 8 decenas y 6 unidades. En la segunda fase, los niños saben que es posible realizar

múltiples particiones de una cantidad, de manera que 64 es visto como $50 + 14$ (5 decenas y 14 unidades), pero también como 8×8 , etc. Finalmente, en la tercera fase el niño aplica el esquema partes-todo al cálculo escrito para explicar cómo funcionan los algoritmos de las operaciones con los números naturales.

Fuson (1992), por su parte, propone tres niveles de desarrollo en la adquisición de los PV:

Nivel I: Los niños usan objetos para modelar directamente las operaciones de suma y resta, pero un objeto sólo representa al mismo tiempo o a un sumando (parte) o al todo (suma), pero no a los dos simultáneamente (ver Fig. 3.9). El niño usa los numerales para contar los objetos que forman las cantidades. Así, en situaciones de adición suelen utilizar la estrategia de «contar todo». Si los sumandos son pequeños (cinco o más pequeños) los niños de este nivel suelen utilizar los dedos, levantando sucesivamente tantos dedos de una mano cuantos indica el sumando, repitiendo el proceso con la otra mano con respecto al segundo sumando. Después cuentan todos los dedos levantados para encontrar la solución del problema. En la resta, los niños suelen emplear no sólo el «emparejamiento», sino también «quitar a», «quitar de» y «añadir a».

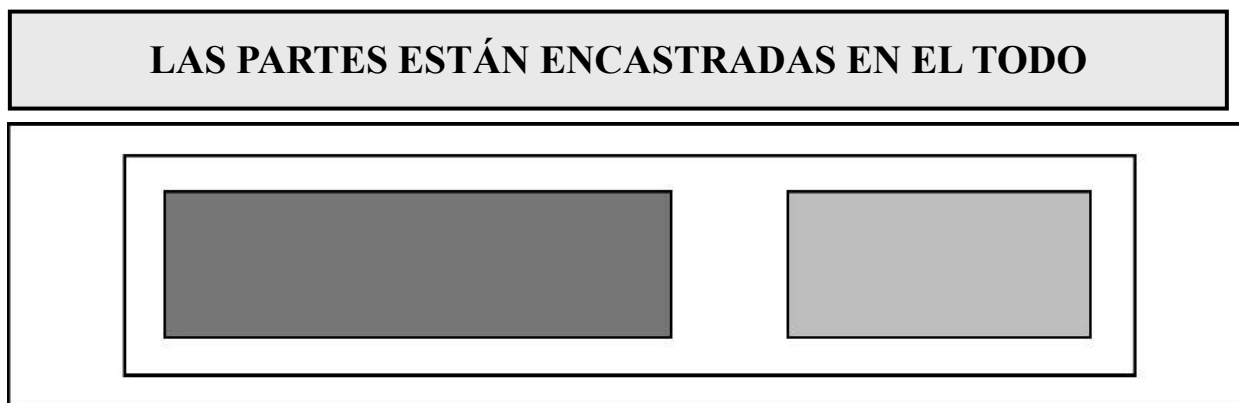
FIGURA 3.9



Nivel II: Ahora los niños pueden emplear entidades para representar al mismo tiempo un sumando y la suma o resultado, de modo que estas entidades pertenecen a los sumandos y a la suma simultáneamente. Los

sumandos aparecen como integrados o encastrados en la suma o todo (ver Fig. 3.10). Además, los numerales se usan ahora para representar cantidades como un sumando o la suma. Las estrategias que suelen emplear consisten en «contar a partir del primer sumando» en tareas de suma, que es una abreviación de «contar todo». En situaciones de resta puede utilizarse igualmente la estrategia «contar a partir del término menor», o bien «contar hacia atrás». En estos casos, los niños emplean un marcador (dedos, por ejemplo) para conocer las unidades contadas.

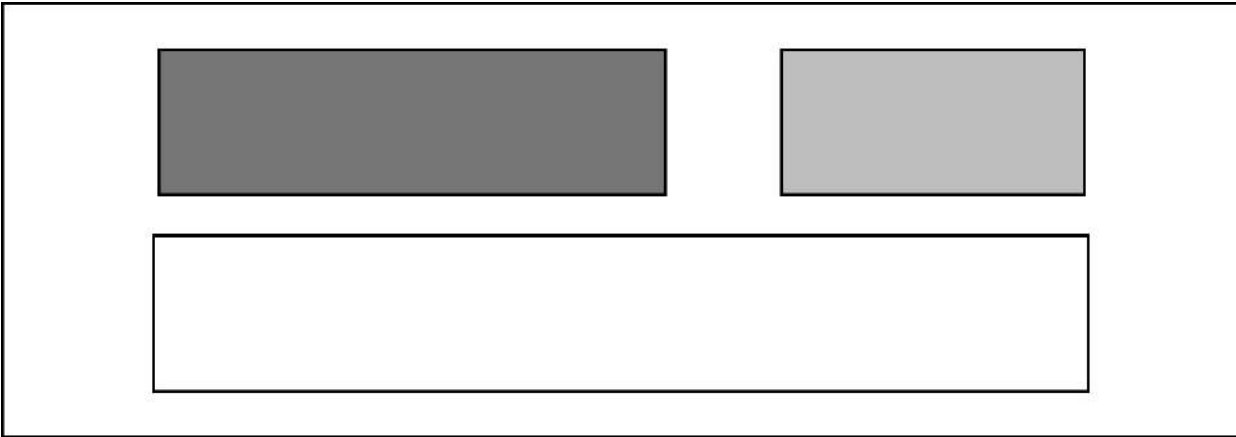
FIGURA 3.10



Nivel III: Las entidades empleadas son aún más abstractas facilitando su unión o separación de una manera más flexible. Sumandos y todo son independientes, de modo que pueden compararse entre sí e incluso componerse o descomponerse para obtener el resultado. Así, por ejemplo, $5 + 6 = 5 + (5 + 1) = 10 + 1 = 11$ (ver Fig. 3.11). Por tanto, los procedimientos empleados para resolver los problemas son sobre todo «hechos conocidos» y «hechos derivados» o «reglas».

FIGURA 3.11





3.8. BIBLIOGRAFÍA

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. y otros (2002). *PEI: Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Ed. Complutense.

Fuson, K. C. (1992). «Research on whole number addition and subtraction». En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). NY: MacMillan.

Ginsburg, H., Klein, A. y Starkey, P. (1998). «The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice». En Sigel, I. y A. Renninger (Eds.), *Handbook of child psychology*. Vol. 4 (pp. 401-476). NY: John Wiley & Sons.

Resnick, L. (1983). «A developmental theory of number understanding». En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). NY: Academic Press.

Wynn, K. (1992). «Addition and subtraction by human infants». *Nature*, 358, 749-750.

4

Enseñando a sumar y restar

V. Bermejo • S. García • M^a A. Martín

4.1. CONTENIDOS CURRICULARES

La enseñanza de las matemáticas según el currículo oficial establecido por el MEC en 1992, tendrá como objetivo general en la etapa de Educación Primaria: «Reconocer situaciones de su medio habitual en las que existan problemas para cuyo tratamiento se requiera operaciones elementales de cálculo, formularlos mediante preguntas sencillas de expresión matemática y resolverlos utilizando los algoritmos correspondientes».

Este objetivo general se concreta en los **conceptos** siguientes:

- «Las operaciones de suma y resta:
 - situaciones en las que intervienen estas operaciones.
 - la identificación de las operaciones inversas (suma y resta).
- Algoritmos de las operaciones.

- Correspondencia entre lenguaje verbal, representación gráfica y notación numérica».

Los **procedimientos** necesarios para llevar a cabo estos contenidos son:

- «Utilización de diferentes estrategias para resolver problemas numéricos.
- Explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos y en la resolución de problemas numéricos.
- Representación matemática de una situación utilizando sucesivamente diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico) y estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Estimación del resultado de un cálculo y valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable.
- Automatización de los algoritmos para efectuar las dos operaciones con números naturales.
- Utilización de la composición y descomposición de números para elaborar estrategias de cálculo mental: suma y resta, con números sencillos».

Las **actitudes** que se pretende fomentar son las siguientes:

- «Curiosidad por indagar y explorar sobre el significado de los códigos numéricos y alfanuméricos y las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números.
- Rigor en la utilización precisa de los símbolos numéricos y de las reglas del sistema de numeración.
- Interés por conocer estrategias de cálculo distintas a las utilizadas habitualmente.
- Confianza en las propias capacidades y gusto por la elaboración y uso de estrategias personales de cálculo mental.
- Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.
- Perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema».

4.2. ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta conviene tener presente una serie de consideraciones didácticas que favorecen y facilitan que el aprendizaje sea significativo en nuestros alumnos. Señalamos las más importantes:

1. Tener en cuenta los conocimientos previos de los niños e incidir de forma especial en los procesos de construcción del pensamiento. No conviene plantear un problema de comparación, por ejemplo, si el niño no sabe resolver los problemas de cambio.
2. Presentar los contenidos matemáticos ligados a la realidad del entorno, en situaciones funcionales, de manera que la actividad del niño tenga una finalidad concreta, como, por ejemplo, resolver un problema real que le interese. Por tanto, conviene hacer ver al niño el interés y utilidad de las matemáticas para la vida cotidiana y extraescolar.
3. Impulsar la reflexión del niño sobre sus respuestas y los procedimientos que ha utilizado para llegar a ellas, pidiéndole que las justifique: ¿por qué crees que es eso?, ¿qué has hecho para saberlo?, ¿cómo lo has averiguado?, etc.
4. Promover el trabajo en equipo y el intercambio de puntos de vista e información entre los alumnos, compartiendo preguntas, explicando descubrimientos y estrategias, de modo que ello les haga más conscientes de sus aprendizajes y puedan autocorregir sus errores.
5. Planificar los contenidos teniendo en cuenta que el aprendizaje significativo requiere tiempo. La construcción de relaciones se realiza lentamente y de forma gradual, de modo que no es bueno fijar tiempos rígidos, ya que ello podría generar frustraciones tanto en los alumnos como en el profesorado.
6. Utilizar una gran variedad de técnicas de enseñanza, que hagan participar activamente al niño. No se pueden descartar las llamadas técnicas «pasivas», como una explicación o una información que

proporciona el maestro, sabiendo que serán eficaces en la medida en que conecten con el nivel de desarrollo cognitivo del niño y con sus intereses.

7. Poner al alcance de los niños materiales concretos, tanto estructurados como no estructurados, así como cualquier recurso que facilite la resolución de los problemas o las cuestiones planteadas: chapas, bolas, botones, material multibase, bloques de Dienes, regletas, recta numérica, calendario, murales y carteles de consulta, etc.

4.3. ENSEÑAR A SUMAR Y RESTAR A TRAVÉS DE PROBLEMAS

Como se indica en el [capítulo 3.3](#), son numerosas las razones que señalan que la resolución de problemas constituye la actividad fundamental para el aprendizaje de la suma y la resta.

Pero resolver problemas no es solamente llegar a resultados correctos, sino que sobre todo consiste en un proceso de construcción de conocimientos sobre las distintas operaciones aritméticas, descubrimiento de conceptos, propiedades, estrategias de resolución, etc. Se trata, pues, de que el niño desarrolle una actitud investigadora, tomando conciencia y reflexionando constantemente sobre el proceso que está llevando a cabo.

Desde esta perspectiva, el papel del profesor cambia, probablemente se complique, pero sigue siendo fundamental. Al igual que el niño, debe adoptar también una actitud investigadora, que sirva de modelo al alumno, guiando el proceso de aprendizaje, fomentando la reflexión y el análisis cuando los alumnos tiendan a dar respuestas irreflexivas o impulsivas, formulando las preguntas oportunas, etc.

4.3.1. Cómo plantear y enseñar problemas

Los problemas que se planteen en el aula deben estar encaminados al descubrimiento de nuevos conocimientos y no solamente a la aplicación de los ya adquiridos. Es importante proponer problemas verbales de todos los tipos, incluidos los no rutinarios, para que los niños experimenten y descubran estructuras semánticas y contextos diferentes, de modo que su aprendizaje sea más completo. Para que así ocurra, conviene, entre otras cosas, cortar el uso de palabras clave que pueden inducirle a error. Por ejemplo, ante la presencia de la expresión «más que», muchos niños concluyen, erróneamente, que hay que sumar para resolver problemas como el siguiente:

*«Juan tiene algunas canicas en su bolsillo y Antonio tiene 5 canicas. Antonio tiene 2 canicas **más** que Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?».*

Los problemas han de ser formulados en un lenguaje claro y familiar para el niño y en contextos de su vida cotidiana, aprovechando cualquier situación que surja en el aula o que aporte de sus experiencias, para facilitar su comprensión y una adecuada representación mental de los mismos.

Las estrategias informales de los niños para resolver problemas no son obstáculo para el aprendizaje, sino que contribuyen en la construcción de procedimientos cada vez más elaborados, económicos y abstractos. Igualmente, el uso de materiales concretos es una ayuda importante, sobre todo al principio del aprendizaje; pero más tarde puede inducir a emplear estrategias más elementales de lo que realmente los niños son capaces de emplear, por lo que el profesor debe estar atento y valorar la conveniencia de su utilización en cada momento.

La invención de problemas por los propios niños es una actividad muy estimulante, motivadora y eficaz para el desarrollo del pensamiento infantil. Cuando un niño inventa un problema, reflexiona sobre sus conocimientos, maneja las relaciones de la operación correspondiente y puede tomar conciencia de errores en esas relaciones que él ha establecido y corregirlos, si el problema planteado no tiene sentido. Esta actividad puede proponerse de forma totalmente libre o con ciertas restricciones: sobre un tema concreto, a partir de datos de un campo numérico determinado, sobre una operación específica, etc.

Ahora bien, al principio conviene proponer problemas de cambio o combinación, para resolverlos colectivamente y con la ayuda de material

concreto, atendiendo especialmente a la fase de verbalización. Se trata de facilitar la comprensión del esquema partes-todo, debatiendo las posibles representaciones plásticas y simbólicas que sugieren los niños, así como las estrategias empleadas para solucionarlos. Poco a poco se introducen otros tipos de problemas: igualación, comparación y problemas no rutinarios, que veremos en el apartado siguiente. Posteriormente, se puede introducir un folio o un cuaderno de «Historias de números», que puede prepararse con cuartillas grapadas o encuadernadas, con portada decorada por el propio niño. Cada día inventa un problema una persona distinta, niños o profesor, y lo resuelven todos en su cuaderno, de forma gráfica y simbólica. Se dispondrá de materiales fácilmente manipulables, para que pueda usarlos el niño que los necesite. Después se ponen en común las distintas estrategias empleadas, las formas de representar el problema y las posibles soluciones, debatiendo en grupo la viabilidad de éstas, la adecuación y economía de las estrategias y la mayor o menor transparencia de las representaciones.

El mundo adulto suele ser atractivo e interesante para el niño. Por ello, el montaje de una tienda en clase puede ser una buena situación para plantear y resolver problemas. Los niños participan eligiendo el tipo de tienda, los productos para vender, aportando envases, estableciendo precios, escribiendo carteles, etiquetas, anuncios, «fabricando» monedas y billetes, comprando y vendiendo, etc.

Más adelante, se pueden alternar sesiones de inventar problemas y sesiones de resolverlos de forma más autónoma: cada niño inventa un problema y lo escribe y dibuja en una hoja. Una vez que el profesor revisa y comenta el problema con el niño, éste lo copia en una ficha con su nombre. El fichero que se vaya formando con los problemas de todos los alumnos se utilizará en las sesiones de resolución.

4.3.2. Problemas rutinarios y no rutinarios

Existe una amplia variedad de criterios para clasificar los problemas. En el [capítulo 3](#), se han expuesto diferentes tipos de problemas en función de la estructura semántica y el lugar que ocupa la incógnita.

Si atendemos a la solución, los problemas pueden ser de una sola respuesta posible, de varias o sin solución, de solución numérica o de otro

tipo, como tablas, etc. Desde esta perspectiva, Baroody propone dos tipos de problemas: rutinarios y no rutinarios. Los primeros se caracterizan porque la incógnita está especificada, se ofrece la información necesaria para su resolución, el procedimiento a seguir es bastante evidente, hay una sola solución correcta y debe ser hallada enseguida. En cambio, habla de problemas no rutinarios, cuando aparece alguna de las siguientes características: la incógnita puede no estar especificada, o no estar clara; la información que proporciona el problema puede ser insuficiente o demasiada; pueden usarse distintos procedimientos para su resolución y no siempre son evidentes; puede haber varias soluciones, incluso que no haya ninguna y puede que su resolución necesite aplazarse.

Este último tipo de problemas es especialmente interesante, ya que ofrece múltiples posibilidades de potenciar la reflexión, el análisis cuidadoso para distinguir los datos relevantes de los irrelevantes, la flexibilidad para elegir estrategias, la tolerancia ante distintas soluciones y puntos de vista, la perseverancia en la búsqueda de esas soluciones, etc. Veamos algunos ejemplos de problemas no rutinarios:

1. Juan tenía 8 caramelos y le regalaron algunos más. ¿Cuántos caramelos tiene ahora?
2. Pilar tiene 10 chicles y regala unos cuantos a Sara y unos cuantos a Belén. Ahora le quedan 5. ¿Cuántos ha regalado a Sara?
3. Sandra tiene 10 cts., y quiere comprar un chicle que cueste 5 cts., y una gominola que cueste 4 cts. ¿Puede comprarse las dos cosas?
4. Jorge tiene 15 cts. para comprar chucherías. En el quiosco venden piruletas a 10 cts., regaliz a 5 cts., gominolas a 4 cts. y bolsas de pipas a 15 cts. ¿Qué puede comprarse Jorge?

Algunos problemas necesitan mayor perseverancia, o un esfuerzo prolongado para encontrar la solución, como por ejemplo los de dos o más operaciones, o los que se proponen a partir de juegos que se extienden durante un período de tiempo más o menos largo y que hacen necesario un registro de los resultados diarios: ¿Quién ganará más partidas? ¿Por cuánto ganará al segundo? ¿Y al último? ¿Cuántas partidas necesita ganar el tercero para empatar con el primero? ¿Y para ganarle?, etc.

4.3.3. Factores que intervienen en la resolución de problemas

Existen diferentes modelos teóricos que pretenden explicar cómo los niños resuelven problemas. En general suelen constar de las siguientes fases:

1. Representación mental del problema.
2. Selección de una estrategia informal o de la operación aritmética formal que lleve a la solución.
3. Ejecución de la estrategia o de la operación seleccionada.
4. Reactivación de la representación mental del problema sustituyendo la incógnita por el resultado obtenido en la fase anterior.
5. Verificación de la solución.

1. Para que el niño sea capaz de construir una adecuada representación mental del problema, tiene que comprenderlo.

2. En función de la fase anterior, se decide qué métodos son apropiados para hallar la respuesta. Cuando los niños tienen cierta experiencia en la resolución de diferentes tipos de problemas, se les puede ayudar proponiendo preguntas para que relacionen el problema actual con otros similares ya resueltos: ¿Hemos hecho ya algún otro problema parecido a este?, ¿en qué se parecen?, ¿qué tenemos que hacer?, ¿qué averiguamos haciendo eso?, ¿podríamos averiguarlo de otra manera?

3. En esta fase se lleva a la práctica la estrategia planificada. La ejecución no requiere necesariamente la representación simbólica de la operación, sobre todo al principio. El profesor ha de controlar el proceso de ejecución, valorar si la estrategia elegida es la más eficaz o si una intervención adecuada puede llevar al niño a descubrir otra más económica. Por ejemplo, ante el problema:

«Roberto tiene 7 canicas y su hermano le da 6 más. ¿Cuántas canicas tendrá?»,

el niño empieza a contar a partir del 7, pero si se le pregunta: «¿sabes cuántas son 6 canicas más 6 canicas?», el niño contesta «12». Volvemos a preguntarle «¿cuántas serán 7 y 6?», el niño dice: «Claro, 1 más, 13». Esta

simple reflexión hace que Roberto utilice una estrategia de cálculo más avanzada.

4. En esta fase muchos niños, después de resolver de forma gráfica y simbólica un problema de combinación con la incógnita en uno de los sumandos, al pedirles que nos cuenten lo que han hecho, verbalizan el problema como si la incógnita estuviera en el resultado, olvidándose de la representación mental inicial que se hicieron del problema y que les llevó a resolverlo correctamente.

5. Se comprueba si el resultado es coherente con el análisis del problema y con la planificación. Una técnica para comprobar resultados consiste en estimarlos antes de la ejecución. Si el resultado no tiene sentido al compararlo con lo estimado se hace necesario volver sobre el proceso.

Ahora bien, en general el éxito del proceso de solución de un problema depende de varios factores, algunos de los cuales apuntamos a continuación.

4.3.3.1. Comprensión

La comprensión supone un análisis del problema que posibilite una representación mental adecuada del mismo (sus cantidades, las acciones que se realizan sobre ellas y la equivalencia entre las acciones efectuadas y el resultado de las mismas) y la interpretación de dicha representación. Ello permitirá responder a preguntas como: ¿qué se quiere averiguar?, ¿cuál es la incógnita?, ¿qué necesitamos saber para hallar la solución?, ¿qué datos del problema nos dan la información que necesitamos?, ¿qué acciones nos llevarán a la solución? y ¿qué soluciones son razonables?

Así, presentamos, por ejemplo, el siguiente problema verbal (PV):

Néstor ha traído 3 coches y Pedro 2 coches. ¿Cuántos coches tienen entre los dos?

Una vez enunciado el problema insistimos en la necesidad de dedicar tiempo a reflexionar sobre los datos, sobre la pregunta y sobre lo que conviene hacer para contestarla. El profesor puede preguntar: «¿Cuántos coches ha traído Néstor?, ¿y Pedro?, ¿qué se pregunta en esta historia?, y con respecto a esta pregunta, ¿qué se puede hacer para averiguarlo?».

Lo más frecuente es que los niños, al principio, no sean capaces de hacer esta sencilla planificación y que digan «yo ya lo sé». Van dando las respuestas, que no siempre son correctas, y se anotan en la pizarra. Después se pregunta a cada uno cómo lo ha sabido, qué ha hecho para averiguarlo, etc.

Generalmente en estas primeras sesiones, tampoco son capaces de explicar lo que han hecho y dan respuestas de tipo: «Lo he pensado y sé que son 5», o «Mi mamá me lo dijo ayer». Contestan así incluso niños a los que vemos contar con los dedos, de modo que en estos casos no siempre se ajusta lo que hace el niño con lo que dice haber hecho.

Si el niño no tiene una buena comprensión del problema, su representación mental del mismo no será adecuada y le llevará a dar soluciones erróneas. Por ejemplo, veamos el comportamiento de Isabel ante el problema de cambio siguiente:

Tú traías 6 tazos al cole y tu amiga Marisa te da unos cuantos más. Ahora tienes 9 tazos. ¿Cuántos tazos te ha regalado Marisa?

Isabel: 9 tazos.

Prof.: 9 tazos tienes cuando ella te da unos cuantos, pero ¿tú no traías ninguno?

Isabel: Sí, yo traía 6..., espera, voy a ponerlos.

Es evidente que Isabel no ha identificado la incógnita del problema, y ella misma toma conciencia de su equivocación.

Como se ha visto en el [capítulo 3](#), los errores más frecuentes que suelen cometer los niños al resolver PV están causados por una mala comprensión y una representación deficiente de los mismos. Conviene, pues, enseñar a los niños a usar técnicas de representación que les ayuden a reflexionar sobre el problema y a analizarlo para facilitar su comprensión. En este sentido recordamos que existen distintos niveles de abstracción en la representación de las operaciones:

- a) material concreto,
- b) expresión gráfica,
- c) expresión simbólica.

a) Las primeras representaciones se forman con **materiales concretos**. El niño representa el problema con elementos reales y efectúa la acción pertinente sobre ellos (contarlos todos, quitar los indicados en el problema y contar los que quedan, etc.). Es importante pedirle que verbalice lo que está haciendo, para asegurar el establecimiento de relaciones entre sus acciones y una primera representación verbal.

Al principio hay que ayudar a algunos niños a verbalizar sus propias acciones: «Pones estos 3 coches de Ana y otros 2 de Luis. Entre los dos tienen...».

Siguiendo con el ejemplo de Néstor y Pedro, anteriormente iniciado, se puede proponer a los niños dramatizar los contenidos del problema presentando los cochecitos que han traído los niños o que hay en clase y explicando al mismo tiempo lo que vamos haciendo, de modo que el profesor pregunta: «¿Cuántos coches coge Néstor?, ¿y Pedro?». Una vez que cada uno tiene los coches indicados, se pide a alguno de los niños que dio una respuesta errónea que averigüe cuántos tienen entre los dos.

Más tarde, cuando son capaces de verbalizar lo que están haciendo, se les puede pedir que cuenten lo que han hecho, pero sin el material concreto delante. De esta forma las acciones externas se van convirtiendo en acciones internas y el niño toma conciencia de ellas:

«He puesto las 5 canicas de Jorge y he quitado 1 que ha perdido y le quedan 4».

b) Un nivel más abstracto de representación es la **expresión gráfica** del problema. Al principio necesitan la presencia del material sobre el que han actuado. Algunos niños incluso lo utilizan como plantilla para hacer su dibujo: Ponen los caramelos o las chapas sobre el papel y marcan las siluetas, pero no suelen representar la acción. Por ejemplo, ante el problema:

Juan tenía 6 caramelos y Ana le regala 2. ¿Cuántos caramelos tiene ahora Juan?

Jorge representa los dos sumandos de forma figurativa, pero no representa la acción (ver [Fig. 4.1](#)).

FIGURA 4.1

REPRESENTACIÓN DE LOS DOS SUMANDOS

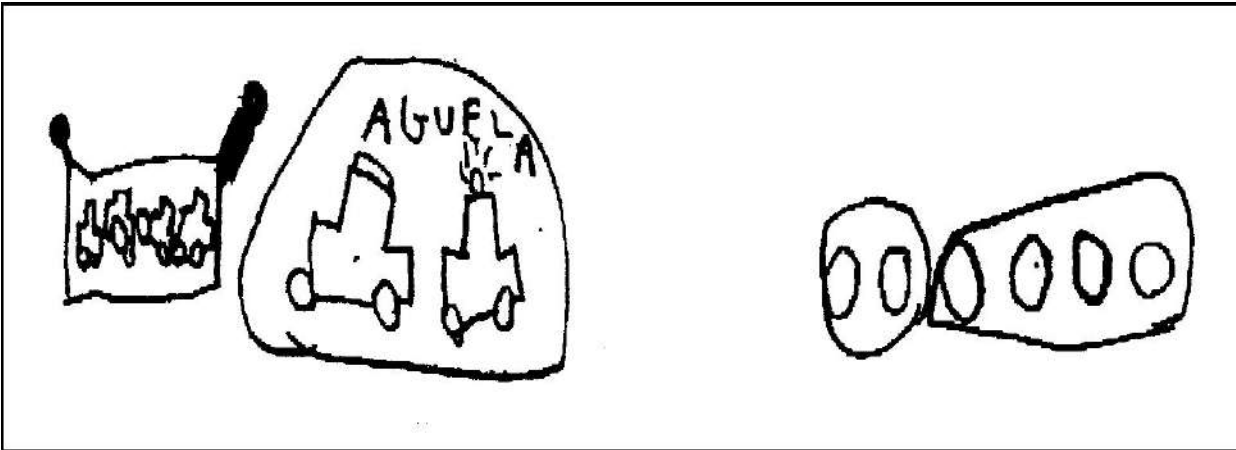


Cuando el niño verbalice lo que ha dibujado, debemos hacerle caer en la cuenta de que en su dibujo no se nota lo que ha tenido que hacer para resolver el problema, para que busque formas de representar la acción. Por ejemplo, ante el PV:

José tenía 4 coches y su abuela le da 2. ¿Cuántos tiene ahora?:

FIGURA 4.2 y 4.3

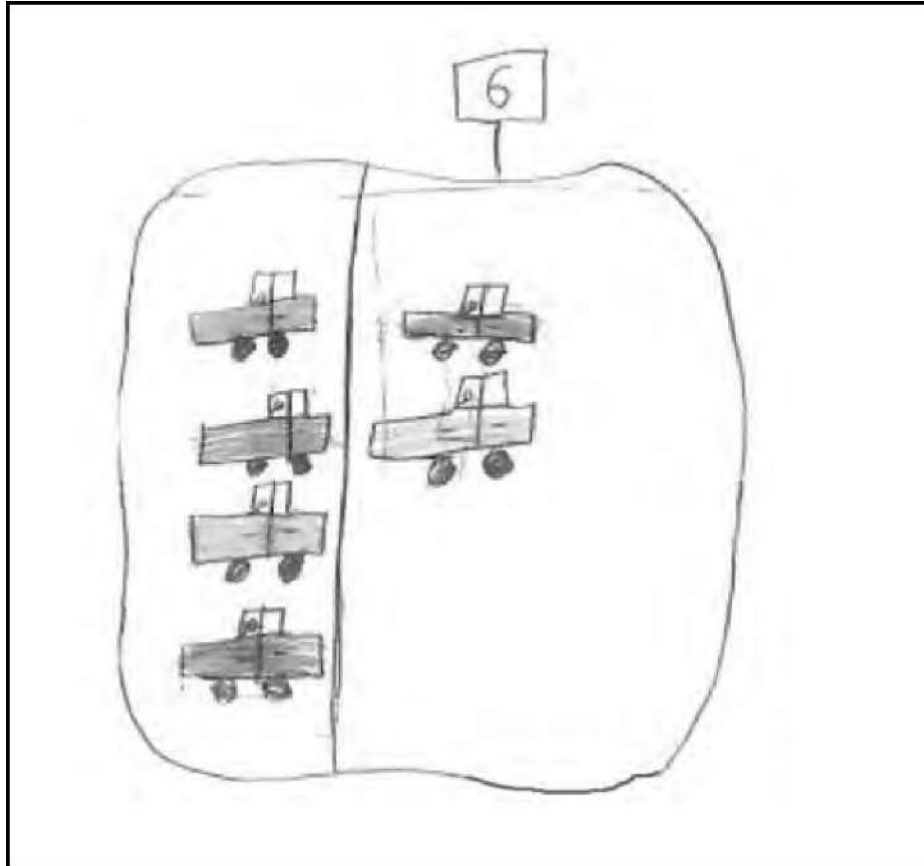
REPRESENTACIÓN DE LOS TÉRMINOS DE LA SUMA



- Otros niños forman un rectángulo o un diagrama dividido en dos partes. Su explicación es que los coches están todos en una caja, a un lado los que tenía José y al otro los que le regala su abuela (ver [Fig. 4.4.](#))

FIGURA 4.4

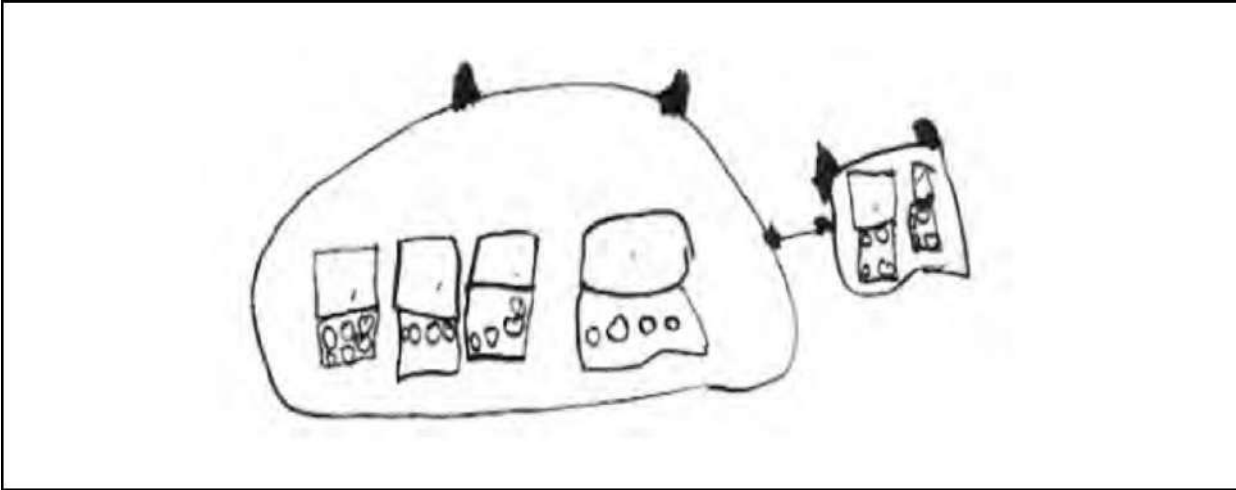
REPRESENTACIÓN MEDIANTE DIAGRAMAS



- O bien para representar la acción de juntar dibujan dos diagramas y una flecha en las dos direcciones entre ellos (ver [Fig. 4.5.](#))

FIGURA 4.5

REPRESENTACIÓN MEDIANTE DIAGRAMAS Y FLECHAS



En los problemas de cambio con decremento, por ejemplo, los niños suelen dibujar el minuendo para borrar después tantos elementos como indique el sustraendo. Si se les hace la observación que de este modo no se ve en el dibujo cuántos cromos tenía Isabel, ni cuántos regala a Nieves, dan otras soluciones:

- Dibujar el minuendo en un diagrama y tachar tantos elementos como indica el sustraendo.
- Dibujar el minuendo en un diagrama, incluyendo otro diagrama para indicar el sustraendo, que unos niños tachan y otros no (ver [Fig. 4.6](#)). O separar con una raya el sustraendo y el resultado (ver [Fig. 4.7](#))

FIGURA 4.6

REPRESENTACIÓN MEDIANTE DIAGRAMAS

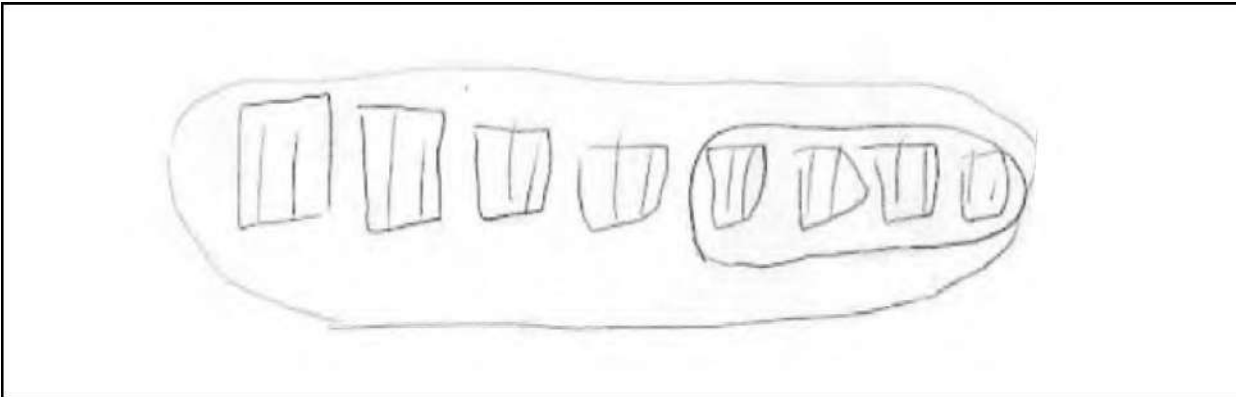
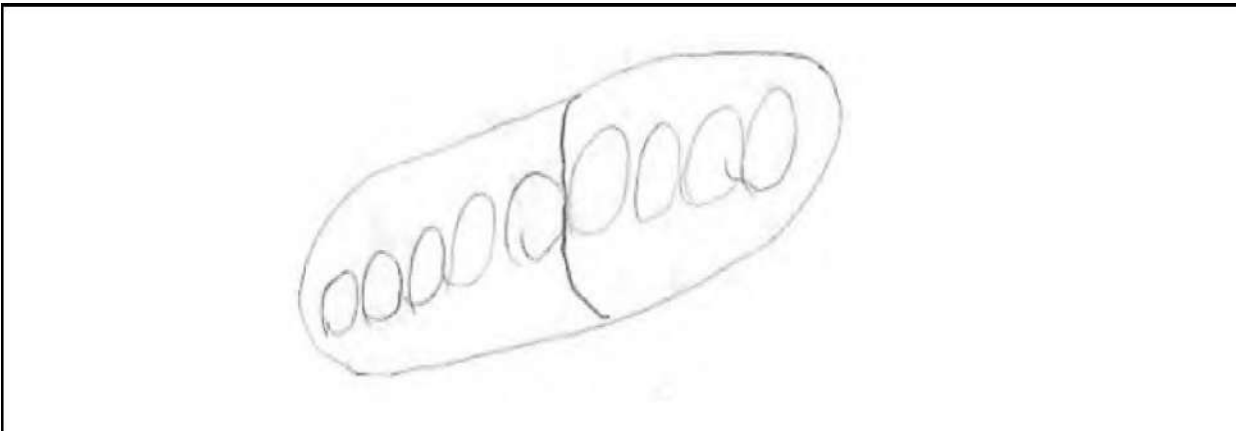


FIGURA 4.7

REPRESENTACIÓN MEDIANTE DIAGRAMA DIVIDIDO EN DOS PARTES



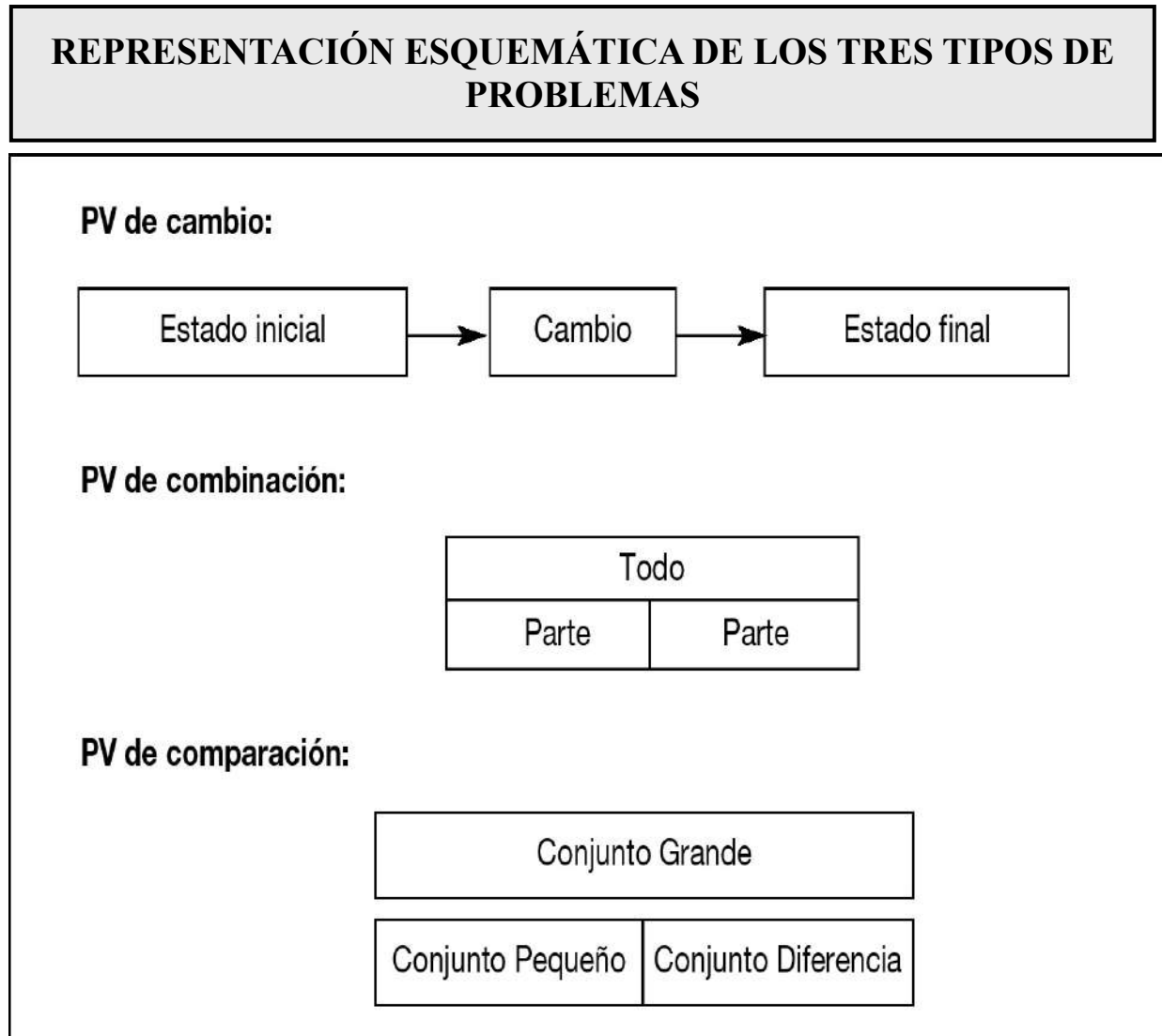
En este nivel, el proceso puede presentarse en sentido inverso: dado un esquema gráfico, se pide al niño que lo decodifique y lo traduzca a una acción concreta y su expresión verbal.

Algunos investigadores han propuesto programas de instrucción para la resolución de problemas, a partir de la representación gráfica. Willis y Fuson (ver Bermejo, 1996) llevan a cabo un trabajo en este sentido con alumnos de 2° de Primaria:

Se enseña a los niños a representar distintos tipos de problemas, mediante dibujos esquemáticos que modelan sus características semánticas.

Después han de colocar las cantidades del problema en la parte correspondiente del dibujo y, en función de ello, se decide qué operación es la más adecuada para hallar la parte desconocida. Proponen a los alumnos tres tipos de esquemas diferentes, según que el PV sea de cambio, combinación o comparación (ver Fig 4.8).

FIGURA 4.8



La enseñanza sigue este orden en general: PV de cambio, combinación, comparación y problemas mixtos (dos o más operaciones). Después de una sesión dedicada a la enseñanza de un tipo de problemas, los niños practican

entre dos y cuatro días sobre ese tipo concreto de problemas en hojas preparadas para ello.

Los resultados de este trabajo y de otros estudios realizados muestran que estas representaciones esquemáticas ayudan al niño a establecer relaciones entre los elementos del problema y a encontrar la forma de resolución más adecuada.

El uso de estos dibujos permite al profesor detectar si las dificultades del niño están en la fase de representación (dibujo inadecuado), en la comprensión de las relaciones entre las cantidades del problema (colocación equivocada de éstas en el dibujo), en la elección de la operación (suma en vez de resta o a la inversa), o en su ejecución (errores en la operación).

c) El nivel más abstracto de representación de las operaciones es la **expresión simbólica**, con cifras y signos matemáticos: el algoritmo.

Como todo sistema escrito, la notación matemática tiene unas características y unas restricciones muy específicas, que el niño irá construyendo poco a poco. Así los niños al principio, incluso algunos que han aprendido a hacer cuentas, cuando se les pide que pongan con números lo que acaban de hacer con material concreto o con dibujos (la resolución de un PV de cambio o combinación) producen diferentes tipos de notaciones no convencionales. Así ante el problema:

Tenías 6 caramelos y te dan 2 más. ¿Cuántos tienes ahora?,

algunos niños lo representan simbólicamente poniendo los dos términos y el resultado mediante la serie numérica (ver Fig. 4.9), y otros lo hacen con las cifras pertinentes sin signos entre ellas (ver Fig. 4.10). Para más información en torno a los algoritmos, ver el capítulo 9 de esta obra.

FIGURA 4.9

REPRESENTACIÓN MEDIANTE LA SERIE NUMÉRICA

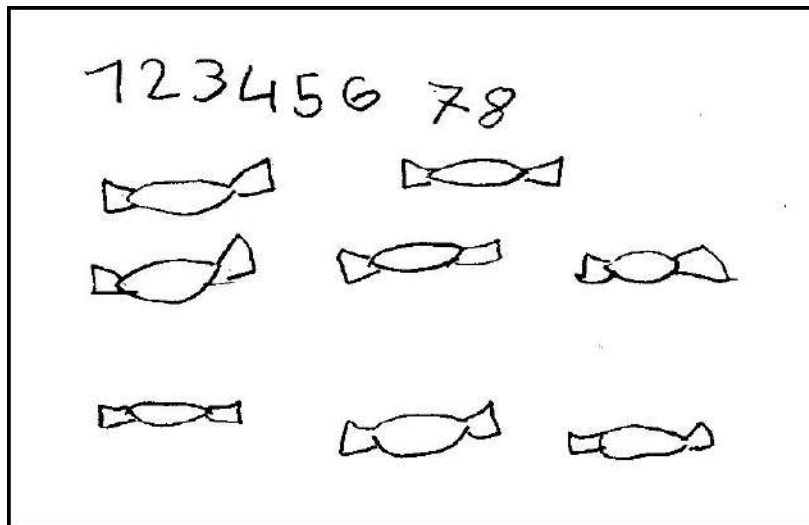


FIGURA 4.10

REPRESENTACIÓN MEDIANTE CIFRAS



4.3.3.2. Motivación

La motivación está íntimamente relacionada con el interés, la autoconfianza, la perseverancia en la búsqueda de soluciones, el gusto en asumir riesgos, etc., así como con la percepción que se tiene de la misma tarea.

La motivación puede tener diferentes fuentes: el propio yo del niño, la misma tarea, o fuentes externas como pueden ser la aprobación de sus padres o del profesor. La más adecuada es la que tiene como fuente la propia tarea, ya que cuando la actividad es atractiva para los niños, se implican en ella hasta su completa realización. Sin embargo, cuando no les interesa el problema, se resisten a iniciarlo, o lo abandonan sin concluir.

La resolución de problemas necesita perseverancia y asumir riesgos, ya que exige tiempo para pensar, supone la posibilidad de cometer errores, descubrirlos y retomar de nuevo el proceso. Es importante, pues, crear un ambiente de confianza, en el que el niño pueda expresarse sin miedo a equivocarse. Además, cuanto mayor es la autoconfianza de un niño, mayor es su éxito en la resolución de problemas. La autoconfianza se incrementa con el conocimiento y disminuye cuando el niño cree que sabe menos ante problemas nuevos. Igualmente, el interés del alumno desciende ante problemas que ya conoce bien.

Por otra parte, en el contexto escolar se suelen formar en los alumnos creencias negativas respecto a los problemas matemáticos (difíciles, aburridos, basados en reglas, etc.), que actúan en detrimento de su motivación. Es importante, pues, evitar esta percepción de los problemas haciendo hincapié en la comprensión de los mismos y secuenciándolos cuidadosamente para que no descienda la autoconfianza del niño por falta de conocimientos, ni su interés por falta de retos nuevos.

4.3.3.3. Flexibilidad

La flexibilidad hace referencia a la capacidad para utilizar y adaptar los conocimientos y recursos que tiene el niño para resolver una tarea nueva. Esta habilidad se incrementa con la comprensión, las técnicas de resolución de problemas y la motivación. Cuanto mayores son sus conocimientos, con relaciones sólidas entre ellos, cuanto mejor maneja técnicas de representación de problemas y cuanto mayor es su motivación, el niño tiene más flexibilidad para ver un problema desde distintas perspectivas, planificar y probar diferentes caminos para llegar a la solución y optar por el más adecuado.

En una de las sesiones iniciales, ante un problema de cambio ($4 + 2$), observamos que Julio representa los dos sumandos con dedos y luego cuenta todo. Para resaltar la estrategia empleada, pedimos a Julio que repita el procedimiento, a fin de dejar clara la utilidad del uso de los dedos para hacer cálculos. En cambio, Loli, que también ha respondido correctamente, sigue otra estrategia.

Prof.: ¿Cómo lo has hecho?

Loly: He sumado.

Prof.: ¿Y qué has hecho para sumar?

Loly: Contar.

Prof.: ¿Cómo cuentas?

Loly: He contado para arriba.

A veces, ante tareas como $5 + 3$, el niño da una respuesta correcta y rápida, pero dice haber usado el modelado directo contando todo. Si se sabe que no ha utilizado esa estrategia, se le hace ver diciéndole, por ejemplo:

Prof.: No te he visto poner dedos y además no te ha dado tiempo a contar hasta ocho. Piensa a ver si lo has hecho de otra manera.

Carmen: Bueno, he pensado 5 y he contado 3 más: 6, 7 y 8.

Esta situación o similar se aprovecha para debatir qué estrategia es más rápida y por qué: contar todo o contar a partir del primer sumando.

En otra ocasión, ante el siguiente problema de igualdad:

Pepe tiene 9 pegatinas y Jorge tiene 5. ¿Cuántas pegatinas tiene que comprar Jorge para tener las mismas que Pepe?,

un niño lo soluciona añadiendo pegatinas a las de Jorge para llegar a 9, pero otro lo resuelve diciendo: «Son 4 porque si Pepe tuviera 10 serían 5, pero 9 es uno menos que 10, así es 4 que es uno menos que 5».

Los conocimientos que tiene el segundo niño, le permiten la flexibilidad de pensamiento suficiente, para descomponer números y establecer relaciones entre ellos. Esta capacidad es especialmente importante en la resolución de problemas no rutinarios.

4.3.3.4. Interacción con el profesor y los compañeros

Entre el desarrollo actual de un niño, que viene determinado por su capacidad de resolver un problema autónomamente, y su desarrollo potencial, está lo que Vygostky llama la zona de desarrollo próximo, que se caracteriza por la posibilidad de resolver un problema bajo la guía del profesor o de otro compañero más avanzado. En este espacio las intervenciones pedagógicas del profesor son realmente eficaces, así como la interacción con los compañeros. Así, por ejemplo, este es el comportamiento de Federico ante un problema de cambio:

Tenías 4 juguetes y mamá te compra otros 2 más. ¿Cuántos juguetes tienes ahora?

Es la primera vez que se propone a Federico este tipo de problema y responde rápidamente «muchos».

Prof.: ¿Cuántos son muchos?, 4, 6, 9...

Fede.: 6 son muchos y 9 también.

Prof.: ¿Por qué no coges los juguetes que tenías al principio? (coge 4 juguetes mientras los va contando) ahora los que te compra mamá (pone otros 2).

Fede.: ¿Puedo contarlos?

Prof.: Claro.

Fede.: Tengo 6 (ha contado desde 1).

La intervención del profesor ayuda al niño a encontrar un modo de resolver el problema.

Igualmente, la comparación en grupo de las estrategias elegidas por los niños, la justificación de su elección, sus ventajas e inconvenientes, la propuesta de otras alternativas, etc., crea situaciones muy ricas para el aprendizaje. Así, por ejemplo, ante el siguiente problema de comparación:

Gloria tiene 8 tazos y Jesús 5. ¿Cuántos tazos tiene Gloria más que Jesús?,

la mayoría de los niños guarda silencio, pero otros dicen «8».

El profesor reformula la pregunta de la siguiente manera: «¿Quién gana, Gloria o Jesús? ¿Por cuánto gana?». Las respuestas de los niños son similares a las anteriores. El profesor pide a un niño que ponga con dedos los tazos de Jesús y a otro niño los de Gloria y pregunta: «Si Gloria tuviera 5 tazos, ¿tendría más que Jesús?, ¿tendría menos?».

Algunos dicen que no tiene ni más ni menos, otros dicen que tienen igual.

Prof.: Entonces Gloria tiene igual que Jesús hasta el 5, pero además de 5, ¿tiene más tazos?

Niños: Sí, otros 3.

Prof.: ¿Por cuánto gana Gloria?

Algunos mantienen el 3, pero como hay otros que no lo ven, el profesor pide a los niños que han puesto los dedos que los junten haciendo una correspondencia dedo a dedo.

Prácticamente la mayoría de los niños comprendieron el problema.

4.4. ENSEÑAR ESTRATEGIAS

El debate en grupo de las diferentes estrategias que utilizan los niños en la resolución de problemas constituye la forma más eficaz para que los alumnos avancen en este ámbito. Pero la mayoría de los investigadores sostienen que las estrategias específicas son más eficaces que las generales. Por ello, proponemos diferentes actividades para trabajar este tipo de estrategias.

4.4.1. Estrategias de la suma

4.4.1.1. Modelado directo

El niño representa los sumandos con material concreto o con los dedos. Después cuenta todo desde el 1 o a partir de uno de los sumandos. Ante el PV:

Juan tiene 3 canicas y Antonio 2. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?,

algunos niños representan con objetos o con dedos las 3 canicas de Juan y las 2 de Antonio y cuentan todas desde 1. Otros después de representarlas, perciben globalmente uno de los sumandos y cuentan a partir de él.

Cualquier actividad o juego (de los que posteriormente describiremos), puede servir al niño para practicar esta estrategia, insistiendo en que el niño represente con dedos u objetos cada uno de los sumandos antes de contar.

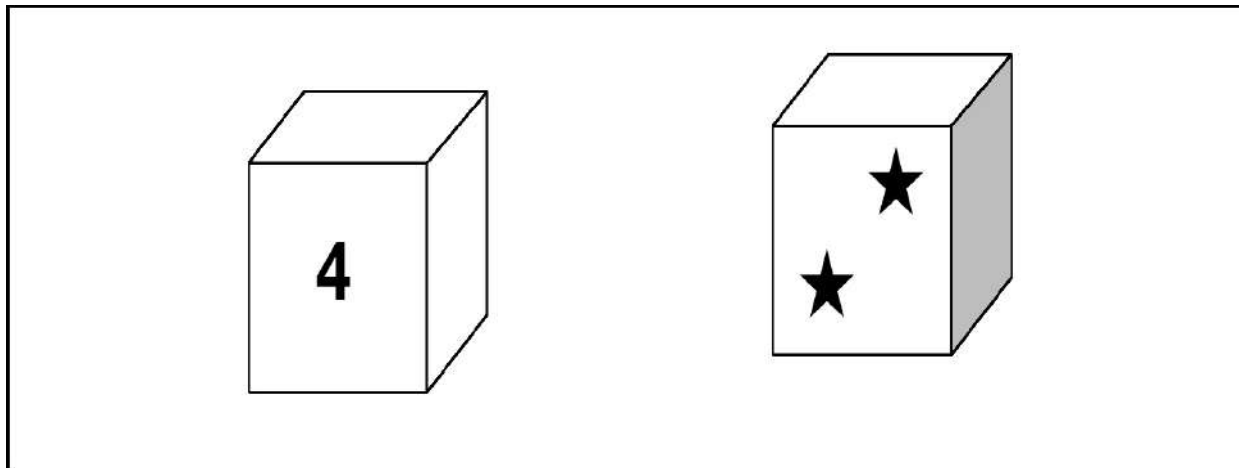
4.4.1.2. Conteo

- a) **Contar todo desde 1**, sin representar anteriormente los sumandos con modelos. Así ante el PV anterior, el niño cuenta desde 1 extendiendo frecuentemente los dedos paralelamente a su secuencia de conteo. Existen múltiples modos de facilitar el uso de esta estrategia, como, por ejemplo, pidiendo a los niños que cuenten mentalmente en los períodos de espera, cambio de actividad, salida de clase, etc.
- b) **Contar todo a partir del primer sumando**: $2 + 4$ son: 2, 3 (+1), 4 (+2), 5 (+3), 6 (+4), son 6. He aquí algunas actividades para hacer avanzar al niño en esta estrategia:

Juegos con dos tipos de cartas, unas con cifras y otras con dibujos, con la condición de que hay que contar a partir de la cifra. O también juegos con dos dados, de modo que uno tiene cifras y otro puntos u otras figuras, guardando la misma condición anterior (ver [Fig. 4.11](#)).

FIGURA 4.11

ESTRATEGIA DE CONTAR A PARTIR DEL PRIMER SUMANDO



- c) **Contar a partir del sumando mayor:** Supone conocer, al menos a nivel intuitivo, la propiedad conmutativa de la suma.

Así mismo requiere ver cuál de los sumandos es el mayor de los dos: $2 + 4$: 4, $5 (+1)$, $6 (+2)$, son 6.

Cualquier actividad de composición, descomposición o complementación de un número ayudará al niño a descubrir y utilizar la propiedad conmutativa. Por ejemplo: (Se puede hacer primero con material concreto y después con numerales, de forma colectiva.) Sobre una mesa se disponen 5 macetas en hilera, y algún otro objeto que sirva de separación, por ejemplo un libro. Se pregunta a los niños cuántas plantas hay y cómo podríamos colocarlas. Después de cada nueva descomposición dirán cuántas hay a un lado y otro del libro y el total. Cada niño expresará de forma gráfica y simbólica alguna de las descomposiciones y lo verbalizará. (Ver [Fig. 4.12.](#))

FIGURA 4.12

DESCOMPOSICIÓN MANIPULATIVA DEL 5



Conviene hacer una reflexión en cada una de las situaciones, para que los niños constaten la equivalencia entre $2 + 3$ y $3 + 2$, $4 + 1$ y $1 + 4$, etc.

4.4.1.3. Hechos numéricos

- a) **Combinaciones del 1:** $N + 1$, $1 + N$, el número que le sigue a uno dado, siendo N cualquier número natural.

Cualquier tipo de actividad que implique contar hará avanzar al niño en esta estrategia.

- b) **Los dobles, dobles +1** ($4 + 5 = 4 + 4 + 1$), **dobles -1**, ($4 + 3 = 4 + 4 - 1$), **dobles +2** ($4 + 6 = 4 + 4 + 2$), y **dobles -2** ($4 + 6 = 6 + 6 - 2$).

Partiendo de la memorización de los dobles, que los niños realizan con bastante facilidad ($1 + 1$, $2 + 2$, $3 + 3$, $4 + 4$, etc.), proponemos actividades que se pueden trabajar para hacer avanzar al niño en estas estrategias. Se pueden adaptar juegos tradicionales de dados, por ejemplo el parchís o la oca, de forma que cada jugador no adelanta el número de casillas indicado en el dado, sino el doble. Para los dobles a partir del 6, se puede usar un dado con 10 caras, o jugar con dos dados que tengan 3 caras con un 7 y otras 3 con un 8, o con ochos y nueves, o dos caras con cada número.

- c) **Sumas que totalicen 10:** $7 + 3$, $8 + 2$, etc. El 10, como el 5, es un número interesante para las sumas. Se pueden proponer distintos juegos para ayudar al niño a memorizar su descomposición. He aquí uno de ellos (Juego de dieces): Consiste en sumar 10 con los

números de las cartas de la baraja española, es decir, emparejar cartas fijándose en el número. Se separan las cartas desde el as hasta el 10 y se retiran las demás. Se reparten todas entre los jugadores y se dejan en un montón boca abajo. Por turnos, se va poniendo cada vez una carta en el centro, y cogiendo las que suman 10, en un principio de dos en dos cartas (6 y 4, 5 y 5, 3 y 7, etc.) y posteriormente pueden ser tres o más cartas (2 y 1 y 7, 3 y 4 y 3, etc.). Gana el jugador que consigue juntar más cartas que sumen 10.

- d) **Redistribución basada en el 10:** se trata de descomponer el sumando menor para hacer que el sumando mayor sea 10 y luego sumar el resto a ese diez: $8 + 6 = 8 + 2 + 4 = 10 + 4 = 14$.

El caso más sencillo de aplicación de esta estrategia se da en las sumas de 9: $N + 9$, $9 + N$: $9 + 7$ son $(9 + 1) + (7 - 1) = 10 + 6 = 16$

Para avanzar en esta estrategia, se pueden proponer juegos en los que se utilicen dos dados, uno con el 9 en todas las caras y otro con diferentes números.

- e) **Analogías:** $2 + 4 = 6$, $20 + 40 = 60$, $200 + 400 = 600$; $7 + 2 = 9$, $17 + 2 = 19$, $27 + 2 = 29$.

Para usar estas últimas estrategias, el niño tiene que tener un conocimiento fluido de la serie numérica, de las relaciones que se establecen entre los números (inclusión, compensación de diferencias, analogías) y un conocimiento al menos intuitivo de la propiedad asociativa de la suma.

4.4.2. Estrategias de la resta

4.4.2.1. Modelado directo

a) *Estrategia de separación*

Consiste en representar mediante objetos o imágenes el minuendo, quitar el número de elementos que indica el sustraendo y contar los elementos

restantes. Ejemplo, $5 - 2$: se ponen 5 dedos, se quitan 2 y se cuentan los que quedan.

b) Estrategia de adición

Consiste en representar con objetos, dedos o imágenes el sustraendo, e ir añadiendo elementos hasta llegar al minuendo, contando después los elementos añadidos para hallar la solución. Ejemplo:

Ana tiene 6 fichas y necesita 8 para jugar. ¿Cuántas le faltan?

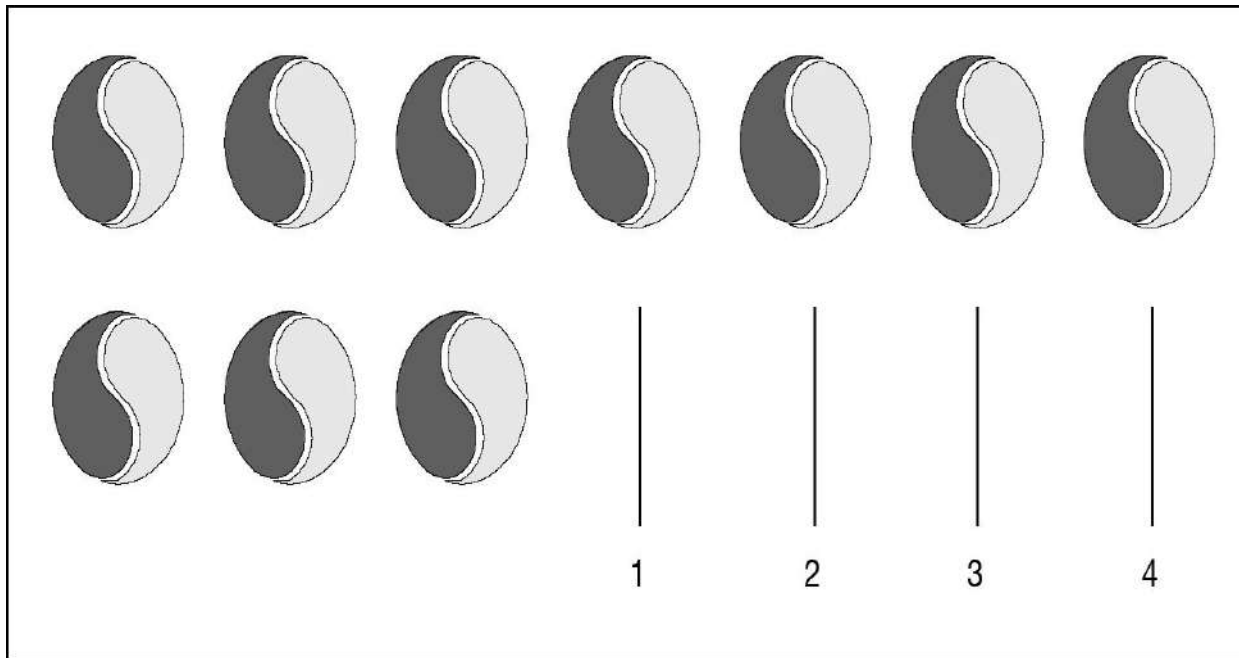
El niño pone 6 dedos, añade 1, y son 7, añade otro y son 8, la solución son 2 fichas porque ha añadido 2 dedos.

c) Estrategia de emparejamiento

El niño representa el minuendo y el sustraendo con objetos, dedos o imágenes, hace una correspondencia uno a uno entre sus elementos y cuenta el número de elementos que no tienen pareja (Fig. 4.13). Ejemplo: $7 - 3 = 4$.

FIGURA 4.13

ESTRATEGIA DE EMPAREJAMIENTO



4.4.2.2. Conteo

a) *Contar hacia atrás desde un número dado*

Expresar el minuendo y contar hacia atrás tantas unidades como indica el sustraendo, el último número contado será la solución. Ejemplo: $(5 - 2)$: 5, 4 (quitando 1), 3 (quitando 2), son 3.

Para que el niño avance en esta estrategia, se puede utilizar la línea numérica. Se marca una línea numérica en el suelo, del 0 al 10, que representa una calle con un guardia de tráfico. Éste puede parar a los coches en el cruce que le parezca, pero una sola vez o ninguna. Por turno, cada niño se coloca en el cruce 10, y retrocede (hacia el 0) por la calle hasta que el guardia de tráfico (otro niño) le manda parar.

Mientras está parado, el conductor debe fijarse en cuántos cruces ha pasado ya y calcular los que le faltan para terminar su recorrido (estaba en el 10, me mandó retroceder 3, pues 10, 9, 8, el 7, me faltan 7), pues al final debe decírselo al guardia, que lo apunta en una nota para que ningún otro guardia mande parar en el mismo sitio. Después se cambia de guardia y de conductor. Cuando ya han participado todos los niños, deben representar algunas descomposiciones sobre líneas numéricas impresas en un folio,

marcando las distintas paradas, y escribir la expresión numérica de cada una, explicando después cada representación. (Ver Fig. 4.14.)

FIGURA 4.14

LÍNEA NUMÉRICA SOBRE LA QUE SE JUEGA										
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

b) Contar hacia adelante

Partir del sustraendo y contar hacia adelante hasta llegar al minuendo, al tiempo que se lleva la cuenta del número de pasos dados. Ejemplo: $(9 - 7)$: son 7, 8 (es 1), 9 (son 2), la respuesta es 2.

Aquí también puede utilizarse la línea numérica. O puede adaptarse para avanzar en esta estrategia el juego con aros. Se usan 5 aros de plástico y un cono también de plástico para introducirlos. Se coloca el cono al lado de una pared y a partir de una marca en el suelo, cada niño tira los 5 aros para introducirlos en el cono. Se anota el 5 y los aros que han quedado dentro. Después se averigua los aros que quedan fuera. Si por ejemplo hay 3 dentro del cono, el 4 y el 5, o sea 2, son los que se han quedado fuera del cono. Ganará el jugador que más aros haya metido en el cono en un número determinado de tiradas.

Se puede adaptar a cualquier número sobre el que se quiera trabajar. Además, es un juego para componer y descomponer números.

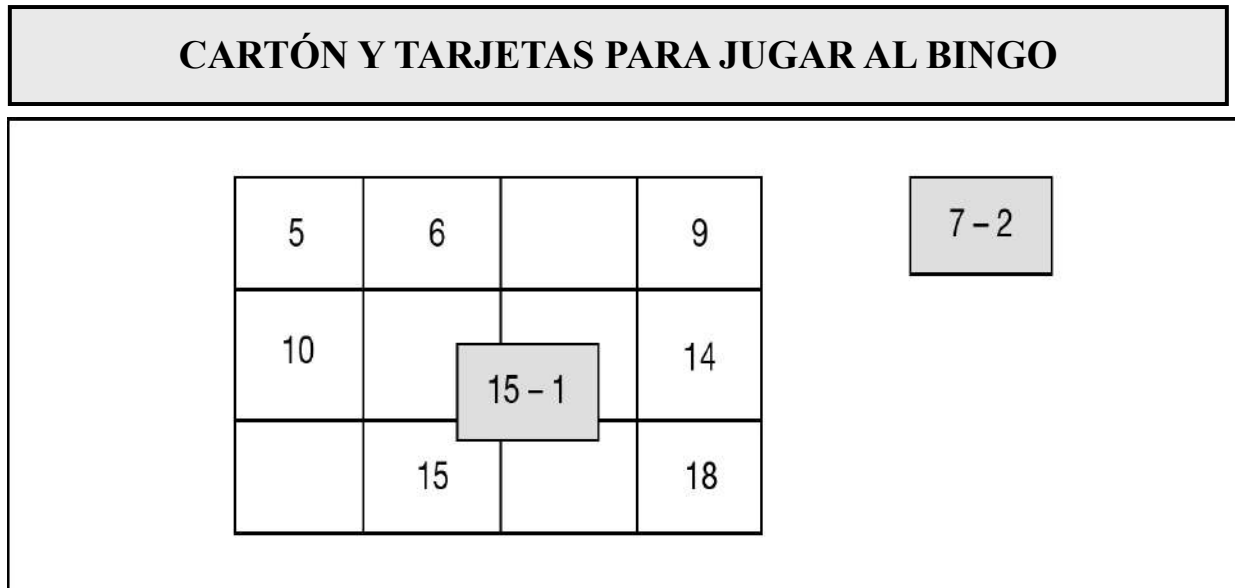
4.4.2.3. Hechos numéricos

a) Combinaciones de $N-1$ y $N-2$

El bingo puede ser una buena actividad para practicar esta estrategia. Cada jugador tiene un cartón con el resultado de diferentes restas y objetos para

taparlos. Los cartones han de ser todos diferentes. El niño que se encarga de «cantar», lo hace mediante tarjetas en las que están escritas las restas. Conviene empezar por las más fáciles para los niños, -1 , -2 ($7 - 1$, $3 - 2$...). Cuando un jugador cubre todos los números de su cartón dice «¡Bingo!», y se comprueba que es correcto para ratificarlo como ganador. (Ver Fig. 4.15.)

FIGURA 4.15



b) Complementación de la suma

La suma y la resta se complementan, $2 + 3 = 5$, luego $5 - 3 = 2$ y $5 - 2 = 3$.

La actividad para avanzar en esta estrategia puede ser «¡Saludos!». Para tres jugadores. Se necesita una baraja de 40 cartas, del 1 al 10. Se reparten las cartas entre dos de los jugadores, que las colocan en un montón. De forma simultánea, levantan la primera carta de sus montones y la enseñan al otro niño, sin verla ellos. El tercer jugador dice la suma de las dos y cada jugador debe adivinar cuál es su carta, viendo la carta del contrario (si la carta del otro es un 3, y la suma total es 7, la mía tiene que ser 4). Quien lo hace correctamente se lleva las dos, ganando el que más cartas consigue.

Finalmente es también interesante trabajar la reversibilidad de la suma y la resta ($3 + 2 - 2 = 3$), así como las restas inversas de un doble ($4 + 4 = 8$, 8

$-4 = 4$).

4.5. BIBLIOGRAFÍA

Baroody, A. J. (1994). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Ediciones Paidós.

Bermejo, V. (1996). «Enseñar a comprender las matemáticas». En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción* (páginas 571 a 595). Madrid: Síntesis.

Kamii, C. y de Vries, R. (1985). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Maza Gómez, C. y otros (2001). «Adición y sustracción». En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis ([páginas 177-202](#)).

5

Aprendiendo a multiplicar y dividir

Enrique Castro • Encarnación Castro • Luis Rico

5.1. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Los conceptos de multiplicación y división permiten resolver una amplia variedad de problemas que se presentan en la vida cotidiana y son la base para construir estructuras conceptuales más complejas que se aplican en distintos ámbitos del conocimiento científico. Esto hace que entre los fines de la educación matemática, en el nivel de Primaria, se encuentre el aprendizaje de estos conceptos. El desarrollo del *sentido numérico* basado en la estructura multiplicativa hace referencia a que los niños deben de adquirir una comprensión integrada de las operaciones aritméticas y deben ser capaces de reconocer los diferentes significados e interpretaciones que toman la multiplicación y la división en contextos concretos, desarrollar estrategias de cálculo y comprender que esas operaciones son modelos que se aplican en un amplio campo de situaciones.

La comprensión integrada de estas operaciones conlleva conocer las relaciones que existen entre ellas: la multiplicación como suma reiterada, la división como resta reiterada, que la multiplicación y la división son

operaciones inversas, así como las propiedades de las operaciones. Conocer estas relaciones y emplearlas con acierto en la resolución de problemas, son componentes del sentido numérico.

5.1.1. La multiplicación como adición repetida

En un contexto de aprendizaje de tipo acumulativo en el que los conceptos numéricos de nivel superior se apoyan en los de niveles inferiores, la multiplicación de números naturales está relacionada y basada en la adición de números naturales. La multiplicación de números naturales se considera como adición reiterada de un número natural o cantidad. Así se introduce usualmente en la escuela, lo que exige el dominio de la adición antes de introducir la multiplicación. El siguiente ejemplo muestra este proceso:

Una parcela tiene 4 filas de árboles con 6 árboles en cada fila. ¿Cuántos árboles tiene la parcela?

Cuando un problema de este tipo se utiliza para introducir la multiplicación, la estrategia para resolverlo es realizar la suma de cuatro sumandos iguales a seis.

$$6 + 6 + 6 + 6 = 4 \text{ veces } 6 = 4 \times 6.$$

De manera general, dados dos números naturales **n** y **a**,

$$\mathbf{n \times a = n \text{ veces el sumando } a = a + a + \dots + a.}$$

Los dos números **a** y **n** se denominan indistintamente factores, **a** es el multiplicando y **n** es el multiplicador, el resultado es el producto.

El simbolismo 4×6 se puede expresar lingüísticamente de varias formas, las cuales se deben al empleo de distintos términos para el signo $\times$, y, a la redacción en voz activa o pasiva: «6 multiplicado por 4»; «4 por 6; 4 veces 6»; «6 repetido 4 veces; «6 sumado 4 veces».

La expresión «veces» es la que más se emplea asociada con la multiplicación en situaciones de la vida cotidiana, también es la que mejor

entienden los niños. La forma «activa», es decir, las expresiones que incorporan «veces» las comprenden y las emplean mejor, tanto los niños como los adultos, que las expresiones «pasivas», es decir, las que emplean «multiplicado por». La variedad terminológica señalada puede tener influencia para los niños que estén iniciándose en el aprendizaje de la multiplicación. En una expresión escrita, como en el enunciado de un problema la interpretación de la expresión simbólica de la multiplicación puede crear dificultad. No ocurre así en las situaciones reales concretas en las que surge la multiplicación, en éstas, se emplean expresiones propias que no tienen por qué ser las anteriores. De ahí la importancia que se concede al estudio de las distintas situaciones que modelan el significado de la multiplicación y división.

5.1.2. La división como inversa de la multiplicación

Al igual que la operación de sustracción se define como la opuesta de la adición, la división es la operación inversa de la multiplicación. Aunque ésta no es la primera idea que adquieren los niños de la división, sí hay que tenerla en cuenta puesto que es parte esencial de la estructura conceptual que engloba ambas operaciones.

Para todo par de números naturales **a** y **b**, con **b** $\neq$ 0, **a** : **b** es el único número natural **c**, si existe, tal que **b** · **c** = **a**; es decir, **a** : **b** = **c** equivale a **a** = **b** · **c**.

El término **a** se denomina dividendo, el **b** divisor y el **c** cociente de la división.

Esta es la definición de *división exacta* entre números naturales. Si **b** no está contenido en **a** un número exacto de veces, es decir, si el número **c** no existe, entonces la división exacta no está definida entre los números **a** y **b**. La división 18 : 3 está definida en el conjunto de los números naturales pues da como resultado 6, pero la división 5 : 14 no lo está puesto que no existe un número natural que multiplicado por 14 dé 5; tampoco está definida la

división $17 : 3$. Así pues, la división de números naturales tiene algunas restricciones como que el dividendo ha de ser mayor que el divisor y que no siempre hay división exacta. Estas limitaciones se resuelven de forma diferente, la primera con la introducción de las fracciones, la segunda mediante la definición de división entera o división con resto distinto de cero.

Dados dos números naturales **a** y **b** con $a \geq b$, $b \neq 0$, existe un único número natural **c** y un único número **r** (resto) tal que $a = b \cdot c + r$ con $0 \leq r \leq b$.

5.2. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

La comprensión de las propiedades de la multiplicación y de la división es fundamental para aplicar estas operaciones de forma efectiva en distintas situaciones. Para su aprendizaje se debe poner más énfasis en las ideas y menos en la terminología y las definiciones. Conocer las propiedades significa aplicarlas en la situación adecuada. Se debe conocer que la multiplicación y la división no tienen las mismas propiedades, por ejemplo, que la multiplicación sí tiene la propiedad conmutativa pero que la división no la cumple, es decir, que $21 : 3$ no es igual que $3 : 21$. Hay niños que identifican ambas expresiones y cometen el error de dividir el número más grande entre el más pequeño, en todas las ocasiones.

5.2.1. La propiedad conmutativa

La propiedad conmutativa se refiere al orden en que se multiplican dos números. Su definición con números descontextualizados es fácil, y significa que el resultado de multiplicar dos números es independiente del orden empleado. Ahora bien, su interpretación no es la misma para situaciones asimétricas que para situaciones simétricas. En situaciones asimétricas y debido a que en ellas los dos factores tienen significados distintos, no es

obvio que 3×5 sea lo mismo que 5×3 . El dibujo de 5 cajas con 3 fresas cada una no es lo mismo que el dibujo de 3 cajas con 5 fresas cada una. Estas diferencias pueden provocar dificultades en el reconocimiento de que la multiplicación es independiente del orden.

Las situaciones simétricas permiten poner de relieve, con mayor claridad la propiedad conmutativa de la multiplicación. Las matrices rectangulares de puntos o los productos de medidas son útiles para visualizar con facilidad esta propiedad.

5.2.2. La propiedad asociativa

Las operaciones con números parten de dos datos para obtener un tercero, al operar con más de dos datos surge la duda de qué pareja elegir para empezar. En el caso de la multiplicación, se puede empezar a partir de cualquier pareja de números, en el caso de la división no, esto se debe a que el producto cumple la propiedad asociativa y la división no. Si se pretende multiplicar los números 4, 7, 9 se puede multiplicar primero 4×7 y lo que resulta por 9, lo que se indica con paréntesis $(4 \times 7) \times 9$, o bien multiplicar 7×9 y luego multiplicar 4 por su resultado, lo que se indica $4 \times (7 \times 9)$; ambos resultados son iguales:

$$(4 \times 7) \times 9 = 4 \times (7 \times 9) = 4 \times 7 \times 9$$

La propiedad asociativa de la multiplicación proporciona libertad en el cálculo del producto de varios números y, unida a la conmutativa, permiten que esos productos se puedan realizar en un orden cualquiera. Para la división, que no goza de la propiedad asociativa, no es lo mismo $(30 : 5) : 3$ que $30 : (5 : 3)$.

5.2.3. La propiedad distributiva

El empleo en forma simbólica de la propiedad distributiva no es adecuado a los primeros niveles educativos. Pero sí es útil y se emplea para relacionar

hechos numéricos y establecer estrategias de cálculo numérico. El cálculo de 7×8 se puede realizar a partir de 7×7 empleando la propiedad distributiva.

$$7 \times 8 = 7 \times (7 + 1) = (7 \times 7) + (7 \times 1) = (7 \times 7) + 7$$

Para la división no se cumple esta propiedad de manera general $15 : (5 + 3)$ no es lo mismo que $(15 : 5) + (15 : 3)$, es decir, la división no tiene la propiedad distributiva respecto a la suma. Tampoco la tiene respecto a la resta $15 : (5 - 3)$ no es lo mismo que $(15 : 5) - (15 : 3)$.

5.2.4. El 0 y el 1

El 0 y el 1 son dos números especiales en lo que se refiere a la multiplicación y a la división. Es difícil comprender que cualquier número multiplicado por 0 sea siempre 0, y más teniendo en cuenta que el resto de los números no se comporta así. La justificación mediante procedimientos algebraicos de esta propiedad del 0 no está al alcance de los niños. Una actividad que pone de manifiesto las propiedades del 0 y el 1 (pero que no la justifica) es realizar con la calculadora muchos cálculos en los que un factor es 0 o 1, disponerlos en una tabla y observar el patrón.

Con respecto a la división entre 0, normalmente se dice que «no se puede realizar» o que «no está definida». En Educación Primaria, los niños pueden aceptar esta restricción pero no siempre la entienden. Se puede argumentar que un reparto de caramelos entre ningún niño no tiene sentido. Estas limitaciones de la estructura multiplicativa se pueden justificar más adelante en los grados superiores desde un punto de vista algebraico.

Propiedad	Enunciado matemático	Lenguaje del niño	Aplicación
Conmutativa	Para todos los números a y b : $a \times b = b \times a$	Si conozco 3×7 , entonces también conozco 7×3 .	La memorización de hechos numéricos se reduce a la mitad.
Asociativa	Para todos los números a, b, c : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	Si tengo que multiplicar más de tres números no tengo que preocuparme de cuáles multiplico primero.	En estrategias de cálculo mental podemos elegir por dónde empezar
Distributiva	Para todos los números a, b, c : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$	Lo mismo da sumar y después multiplicar que multiplicarlos por separado y efectuar la suma.	Se pueden recordar hechos básicos olvidados a partir de otros conocidos.
Números 0 y 1	$0 \times a = 0$; $1 \times a = a$	0 veces un número es 0; 1 vez un número es el mismo número.	La tabla de multiplicar del 0 es siempre 0. La tabla del 1 es el otro número por el que multiplico.

5.3. SITUACIONES ASIMÉTRICAS Y SIMÉTRICAS

La multiplicación y la división tienen una variedad de significados que es necesario conocer para darles sentido y poder aplicar en las situaciones que lo requieran. La multiplicación en forma simbólica, como $3 \times 6 = 18$, puede representar una variedad de situaciones del mundo real que, en un nivel elemental, se resumen en dos tipos: *asimétricas* y *simétricas*. En las

situaciones asimétricas los factores desempeñan funciones distintas. Por ejemplo, en la situación *¿Cuántos chicles tiene Juan si tiene 3 cajas de 6 chicles cada una?*, que se puede representar mediante 3×6 , el 3 y el 6 representan ideas diferentes: El 3 representa el número de grupos y el 6 representa el número que hay en cada grupo. En las situaciones simétricas los dos factores representan lo mismo y, por tanto, son intercambiables. Por ejemplo, en la situación *¿Cuál es el área de un rectángulo cuyos lados miden 4 y 7 cm respectivamente?*, que puede representarse mediante 4×7 , el 4 y el 7 se refieren ambos a medidas de longitudes y, por tanto, son cantidades del mismo tipo.

En las situaciones asimétricas la multiplicación y la división se pueden presentar ligadas con los significados de reiterar grupos iguales, con la idea de tasa y como comparación de cantidades, que se aplican tanto con cantidades discretas como continuas. Entre las situaciones simétricas están las relacionadas con matrices rectangulares, las que representan combinaciones y las relativas a productos de medidas.

Situaciones asimétricas	Situaciones simétricas
Grupos iguales	Matrices rectangulares
Tasa	Combinaciones
Comparación	Producto de medidas

5.3.1. Grupos iguales

En las situaciones de reiterar grupos iguales se trata de repetir un número determinado de grupos iguales para formar una cantidad. En estos problemas se utiliza «cada» como codificación lingüística. Cuando el número y el tamaño de los grupos es conocido, el problema es una situación de multiplicación. Por ejemplo: *Tengo 3 cajas de fresas con 5 fresas en cada una. ¿Cuántas fresas tengo en total?*



Generalmente, cuando el número de grupos o el tamaño de cada uno de los grupos es desconocido se resuelve el problema mediante una división.

TABLA 5.1

TIPOS DE PROBLEMAS DE GRUPOS IGUALES		
El todo desconocido (se resuelve mediante una multiplicación)	El tamaño de los grupos desconocido (se resuelve con división partitiva)	El número de grupos desconocido (se resuelve con división cuotitiva)
<i>Tengo 4 cajas de bombones. Hay 8 bombones en cada caja. ¿Cuántos bombones tengo en total?</i>	<i>Tengo 32 bombones. Quiero repartirlos por igual entre mis 4 amigos. ¿Cuántos recibirá cada uno?</i>	<i>Tengo 32 bombones y los reparto por igual en cajas de 8 bombones cada una. ¿Cuántas cajas necesito?</i>

5.3.2. Tasa

El término tasa está relacionado con la valoración de cantidades y se emplea con mucha frecuencia asociado a los precios: Uno de los significados del término *tasa* es el valor o precio pagado por una sola cosa. En general, la tasa se refiere a la cantidad de una cosa que corresponde o tiene alguna relación a cierta cantidad o número de otra cosa. Es un valor aplicable a cada pieza o cantidad fija de algo. Una tasa expresa la comparación de las medidas de dos cantidades de diferente naturaleza, en el sentido de que pertenecen a cualidades o magnitudes distintas; las unidades de medida son

distintas en cada una de las magnitudes que intervienen en una tasa. Si una de las magnitudes es el espacio y la otra el tiempo, tenemos la tasa «kilómetros por hora» (km/h) para expresar velocidad; otra tasa de velocidad que relaciona el tiempo y el espacio recorrido es «minutos por kilómetro». En general, la tasa expresa una relación de *muchos a uno*.

Las relaciones entre dos unidades de medida son tasas. Por ejemplo, «milímetros por litro», «centímetros por metro». Otros ejemplos de tasa son las escalas en un mapa y la tasa anual de crecimiento de la economía, que relaciona el dinero con el tiempo.

En los problemas de tasa interviene un total, un número de objetos y una tasa que les afecta. Una forma de codificar lingüísticamente la tasa es emplear la expresión «por». Así, el precio se expresa en «5 euros por litro», y la velocidad en «60 km por hora». La situación: *José compró 3 cajas de bombillas a 5 euros por caja. ¿Cuánto le costaron en total las bombillas?*, es un problema de tasa. También se suele expresar la tasa con otras variantes lingüísticas: Decir que el precio es «5 euros la caja», o manifestar que avanzaba «60 km a la hora» es una manera informal de expresar la tasa. En los enunciados de los problemas, la tasa puede venir expresada como la cantidad que corresponde a una unidad, que a veces puede venir dada mediante la expresión «cada». Por ejemplo,

- *Un kg de sal cuesta 30 céntimos. ¿Cuántos kg de sal puedes comprar con 90 céntimos?*
- *Cada kg de sal cuesta 30 céntimos. ¿Cuánto costarán 3 kg?*

Entre las distintas maneras de expresar la tasa hay diferencias de dificultad para los niños, siendo estas últimas formas más fáciles de comprender. Una de las implicaciones para la enseñanza es que debe favorecer la conexión entre las distintas formas de expresar la tasa, es decir, entre la tasa expresada mediante la «cantidad por unidad» y la tasa expresada mediante «por».

TABLA 5.2

TIPOS DE PROBLEMAS DE TASA

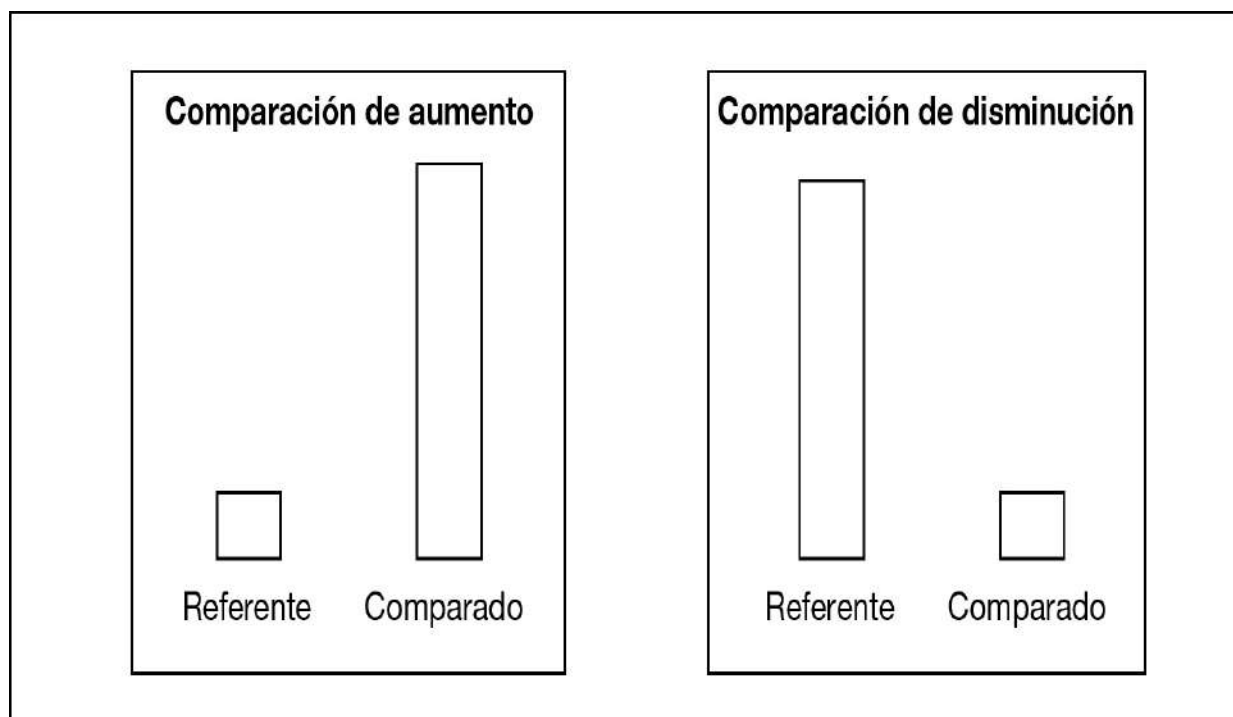
Multiplicación	División partitiva	División cuotitiva o medida
Un móvil se desplaza a 40 km por hora durante 3 horas. ¿Qué distancia recorre?	Un móvil recorre 120 km en 3 horas. ¿A qué velocidad va en km por hora?	Un móvil va a 40 km por hora y recorre 120 km. ¿Cuántas horas ha tardado?

5.3.3. Comparación multiplicativa

La comparación multiplicativa es una extensión de la comparación aditiva. Intervienen dos cantidades del mismo tipo (el referente y el comparado) que son las que se comparan: En el caso aditivo para relacionarlas por diferencia y, en el caso de la comparación multiplicativa, para establecer la razón (un escalar o factor de comparación) entre el comparado y el referente.

Cuando las cantidades son discretas, es decir, vienen expresadas por números naturales, el factor de comparación es otro número natural que indica el número de veces o la tasa que relaciona comparado con referente. Cuando las cantidades son continuas el factor de comparación es un escalar que indica cuántas veces hay que reiterar o dividir el referente para que sea igual al comparado.

Al comparar dos cantidades, la cantidad que hace de referente puede ser más pequeña o más grande que la cantidad comparada. En el primer caso se trata de una comparación de aumento y en el segundo caso de una comparación de disminución. La comparación de aumento se expresa con términos como «n veces más», mientras que la comparación de disminución se expresa con «n veces menos». De acuerdo con esta característica hay dos tipos de problemas de comparación: Los de comparación de *aumento* y los de comparación de *disminución*. Las situaciones de comparación implican tres números y conllevan determinar una cantidad cuando se conocen las otras dos. Por ejemplo, *José encesta 3 canastas y Antonio 5 veces más. ¿Cuántas canastas ha conseguido Antonio?*



La estructura de este problema viene reflejada en el diagrama siguiente.

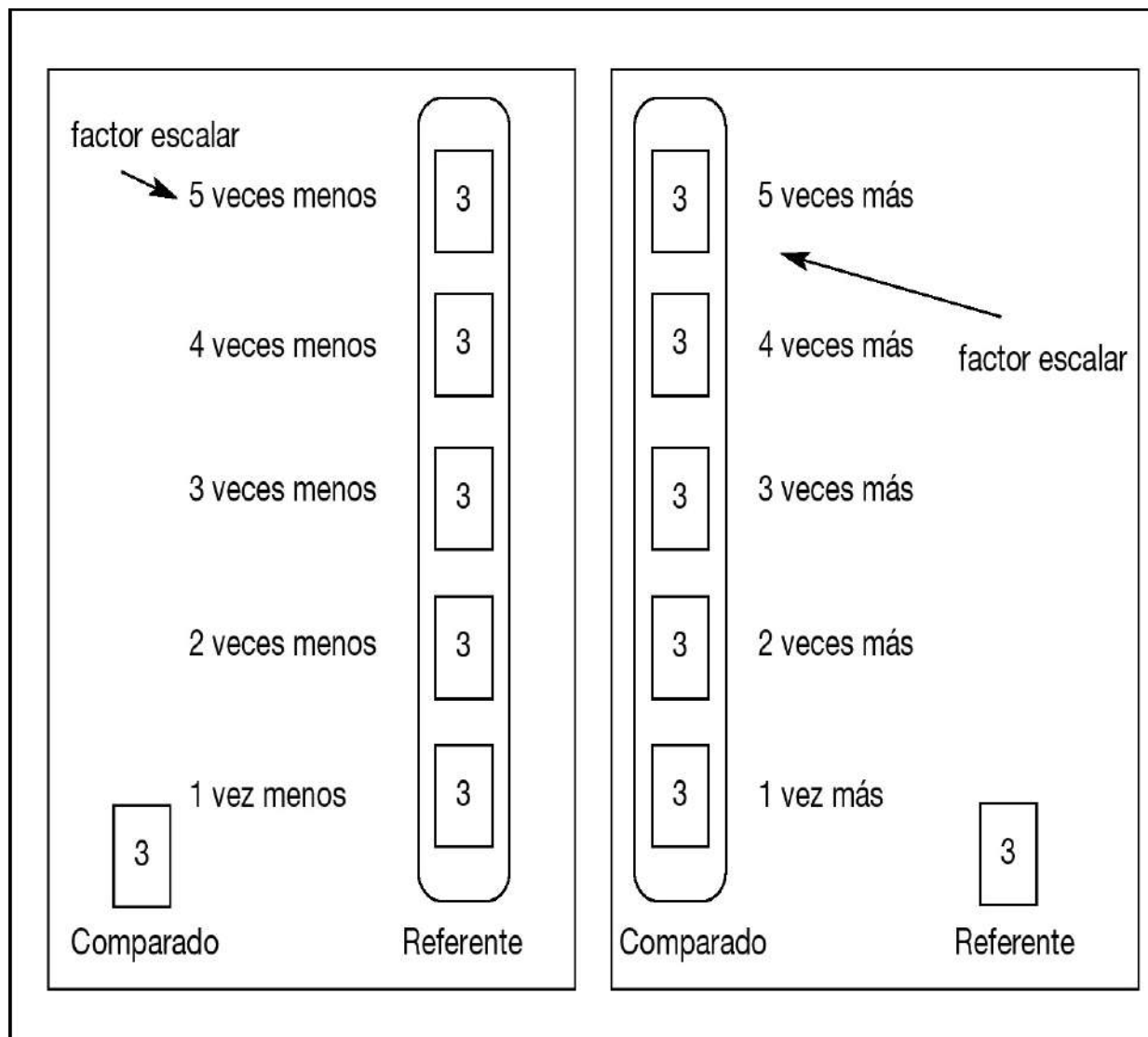


TABLA 5.3

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE AUMENTO

Comparado desconocido	Escalar desconocido	Referente desconocido
José encesta 3 canastas y Antonio 5 veces más. ¿Cuántas canastas ha conseguido Antonio?	José encesta 3 canastas y Antonio 15. ¿Cuántas veces más ha enceestado Antonio que José?	José y Antonio están jugando al baloncesto. Antonio ha enceestado 5 veces más canastas que José. Si Antonio ha enceestado 15 canastas, ¿cuántas ha enceestado José?

TABLA 5.4

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN DE DISMINUCIÓN		
Comparado desconocido	Escalar desconocido	Referente desconocido
La altura de un bloque de pisos es de 15 metros. La altura de cada uno de los pisos es 5 veces menos que la del bloque. ¿Qué altura tienen los pisos?	La altura total de un bloque de pisos es de 15 metros. Cada piso mide 3 metros de altura. ¿Cuántas veces menos mide un piso que el bloque?	La altura de un piso es de 3 metros. Si la altura de los pisos es 5 veces menos que la del bloque. ¿Qué altura tiene el bloque?

5.3.4. Combinación

En un problema de combinación se trata de calcular todas las maneras de combinar por parejas los objetos de un tipo con los objetos de otro tipo. El producto se refiere al número de pares que se pueden formar. Los factores se refieren al número de objetos de cada una de las colecciones. Por ejemplo, en el problema *Marta tiene 3 tipos de blusas y 5 tipos de pantalones. ¿De cuántas maneras puede combinar las blusas y los pantalones?*, el producto es el número de parejas formadas con las blusas y los pantalones. Los factores son el número de camisas y el número de pantalones. Puesto que

estos factores tienen el mismo significado, es decir, representan ambos el tamaño de una colección, no se distingue entre los dos tipos de situaciones de división.

TABLA 5.5

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN	
Producto desconocido	Tamaño de una colección desconocido
Se quiere hacer un conjunto de fichas con 5 formas distintas y con 4 colores distintos. ¿Cuántas fichas distintas se obtienen?	Tenemos 20 fichas que difieren en color y forma. Si hay 4 colores, ¿cuántas formas de fichas hay?

Como puede observarse en el problema del «tamaño de una colección desconocido», la estructura del problema hubiese sido la misma si se desconoce el número de colores.

Este tipo de problemas tienen importancia de cara al estudio posterior de la probabilidad y la matemática finita. Fácilmente, se pueden encontrar situaciones en las que extender el número de factores a más de dos.

5.3.5. Situación de producto de medidas

En general, el producto de dos medidas no está definido, pero hay casos en que sí tiene sentido, y surgen situaciones problemáticas que son modeladas por una multiplicación o una división. Lo que caracteriza a los problemas de producto de medidas es que el producto es también una medida pero de tipo distinto a las medidas de los factores. En el caso del cálculo del área del rectángulo multiplicamos dos longitudes: el largo por el ancho, y obtenemos la medida de una superficie: su área. Si el largo es 5 metros y el ancho 3 metros, su área es $5 \times 3 = 15$ metros cuadrados. Los factores son magnitudes unidimensionales, mientras que el producto es una magnitud bidimensional. La división interviene cuando en el problema se desconoce uno de los factores. Ejemplo: *Un jardín rectangular tiene 5 metros de largo y 3 de ancho. ¿Cuántos metros cuadrados tiene de área?* Este tipo de problemas

son frecuentes en el estudio de las medidas de longitudes, superficies y volúmenes, y también en problemas de física.



5.4. DESARROLLO DEL CONCEPTO DE MULTIPLICACIÓN. ESTRATEGIAS DE LOS NIÑOS

Los conceptos de multiplicación y división se desarrollan durante un amplio período de tiempo que va desde los primeros años escolares hasta la edad adulta. El aprendizaje de la multiplicación y la división tiene sus raíces en la etapa de Educación Infantil, en la que los niños generan sus primeros esquemas multiplicativos mediante la constitución de unidades compuestas y la acción de reiterar, que les lleva a contar progresivamente de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres, etc., o regresivamente, y a realizar repartos equitativos. Los niños construyen sus esquemas multiplicativos modificando sus esquemas previos de contar; el concepto de multiplicación surge en ellos como una consecuencia de modificar estos esquemas previos de contar.

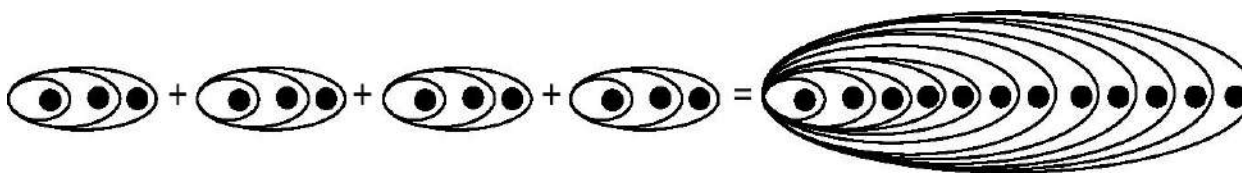
Es importante especificar las operaciones de pensamiento implicadas en la construcción de los objetos matemáticos. Cabe señalar para la multiplicación que:

Si queremos enseñar la multiplicación, debemos comprender primero la naturaleza del pensamiento multiplicativo.

Hay dos opciones para interpretar la naturaleza del pensamiento multiplicativo:

- a) considerar que tiene sus raíces en el pensamiento aditivo y buscar estos orígenes en la enseñanza,
- b) suponer que el pensamiento multiplicativo es una estructura conceptual compleja con entidad propia en la que intervienen una gran cantidad de conceptos, relaciones y propiedades.

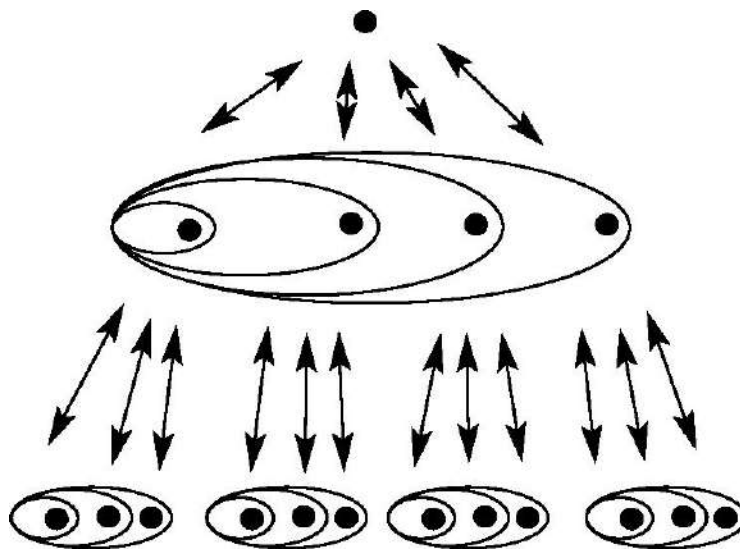
Piaget considera que la multiplicación, además de una manera rápida de realizar una adición repetida, es una operación que requiere un pensamiento de alto nivel y que los niños construyen al margen de su habilidad para pensar aditivamente. Según Piaget, la adición es inherente a la construcción del número, que es interpretado como una adición de unidades. Por otro lado, la multiplicación es una operación que construye el niño al margen de la adición en un nivel más alto de abstracción. Piaget describe las diferencias entre la adición y la multiplicación según el número de niveles de abstracción y el número de relaciones de inclusión que el niño tiene que realizar *simultáneamente*. Como se aprecia en la figura, el pensamiento aditivo conlleva un solo nivel de abstracción en el que cada unidad de tres que se añade está constituida por unos, es decir, tres unos. El niño realiza también relaciones de inclusión en un solo nivel; incluye uno en dos, y dos en tres, y así hasta 12. Los grupos están combinados *sucesivamente*, en un nivel, como $3 + (3 \text{ unos más})$, a continuación $6 + (3 \text{ unos más})$, y finalmente $9 + (3 \text{ unos más})$.



Pensamiento aditivo $3 + 3 + 3 + 3$

En contraste, la multiplicación conlleva realizar dos tipos de relaciones que no se requieren para la adición: a) la correspondencia entre las tres unidades de unos y la unidad de tres unos, y b) la composición de relaciones

de inclusión en más de un nivel. Los dos tipos de relaciones están ilustradas en la figura.



Pensamiento multiplicativo 3×4

Convertir tres unidades de uno en una unidad de tres es una abstracción de más alto nivel que pensar sólo en unidades de uno. La complejidad de las relaciones de inclusión implicadas es también evidente. Hay relaciones de inclusión representadas horizontalmente en el nivel de las unidades de uno, tales como uno está incluido en dos y dos en tres, y en el nivel de las unidades de tres, tales como incluir 1 tres en 2 treses, 2 treses en 3 treses, y 3 treses en 4 treses. Las relaciones de inclusión están representadas también verticalmente en las que 3 unos están incluidas en cada unidad de tres, y 4 unidades de tres están incluidas en el producto. Las flechas en ambas direcciones indican que estas relaciones se realizan simultáneamente.

Para algunos autores, la Aritmética concierne con operaciones y transformaciones de números más que con clases, grupos o tipos de cosas. Desde esta perspectiva, Fischbein asume que el modelo de adición repetida (operaciones con grupos) corresponde «a características del desarrollo mental humano que son primitivas, naturales y básicas». Seguramente, la unidad iterable provee al niño con una base operativa para ver la multiplicación como suma repetida. Así pues, considera que la adición repetida es un modelo intuitivo a partir del cual se desarrolla el concepto de

multiplicación. Considera, además, que para la división hay otro modelo primitivo que es la división partitiva.

Vergnaud (1983) introduce en su análisis de la multiplicación y la división la idea de campo conceptual como «espacio de problemas en los que el tratamiento implica conceptos y procedimiento de varios tipos en estrecha conexión». Distingue entre el campo conceptual de las estructuras aditivas y el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Concibe la multiplicación y la división dentro de un campo conceptual independiente, el de las estructuras multiplicativas, que engloba conceptos interconectados y que se desarrolla durante un período de tiempo muy amplio. Aborda el campo conceptual de las estructuras multiplicativas como una entidad con su propia organización al margen de las estructuras aditivas. Distingue entre el cálculo numérico y el cálculo relacional, que se refiere a las operaciones de pensamiento necesarias para resolver un problema.

5.4.1. Estrategias

Los niños, inicialmente, modelan directamente el significado de la multiplicación y la división. En un problema del tipo «grupos iguales» que, por ejemplo, se refiera a tres grupos de cinco, incluso los niños de 1° de Primaria pueden obtener el resultado contando los objetos de los tres grupos para formar un grupo mayor y contar después toda la colección formada.

Posteriormente los niños emplean estrategias de conteo más sofisticadas tales como:

- a) Contar un único grupo repetidamente, por ejemplo, para contar 3 grupos de 5, colocan los cinco dedos de una mano y sin quitar la mano cuentan los dedos tres veces: 1, 2, 3, 4, 5; 6, 7, 8, 9, 10; 11, 12, 13, 14, 15.
- b) Contar a saltos de 2 en 2, de 3 en 3, etc.; en el caso anterior, pueden contar verbalmente «Cinco es un grupo, diez es dos grupos, quince es tres grupos».
- c) Empleando las combinaciones (los hechos numéricos) conocidas de las tablas de sumar y multiplicar; para determinar 3 grupos de 5 pueden decir: «Dos veces cinco son diez y cinco más son quince».

5.4.2. Estrategias de cálculo

Los niños emplean una gran variedad de estrategias de cálculo cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, algunos emplean materiales manipulativos para modelizar o emplean los dedos; hay bastante consenso en el predominio de algún tipo de *conteo*.

El primer tipo de conteo que emplean los niños es el conteo de unidades simples o conteo de uno en uno. Además de este tipo de conteo de uno en uno, para la multiplicación se necesita otro tipo de conteo más elaborado: el conteo de *grupos regulares* con más de una unidad (contar de dos en dos, de tres en tres, etc.). En este caso y con el fin de separar los nombres de los números en grupos iguales, los niños deben poseer algún esquema para registrar el número de grupos que se repiten. Pueden utilizar un grupo de dedos y contar repetidamente sobre este grupo de dedos, o pueden utilizar los dedos para marcar los grupos contados. Así pues, para ser hábil desde el punto de vista multiplicativo, el niño debe ser capaz de pensar simultáneamente en dos tipos de unidades: unidades de unos y unidades compuestas formadas por grupos de elementos.

Anghileri ha estudiado el desarrollo de la comprensión de los niños desde antes de que reciban instrucción formal, su estudio abarca niños desde los cuatro hasta los doce años de edad. Se centra particularmente en el proceso de contar y en el desarrollo hacia la aplicación de los resultados memorizados de las tablas de multiplicar. (Véase Ilustración 1)

ILUSTRACIÓN 1

**DESARROLLO DE DESTREZAS EMPLEADAS EN
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ADICIÓN Y
MULTIPLICACIÓN**

5.5. DESARROLLO DEL CONCEPTO DE DIVISIÓN. ESTRATEGIAS

de que estudien la división en la escuela. Los problemas de división que se plantean son de dos tipos.

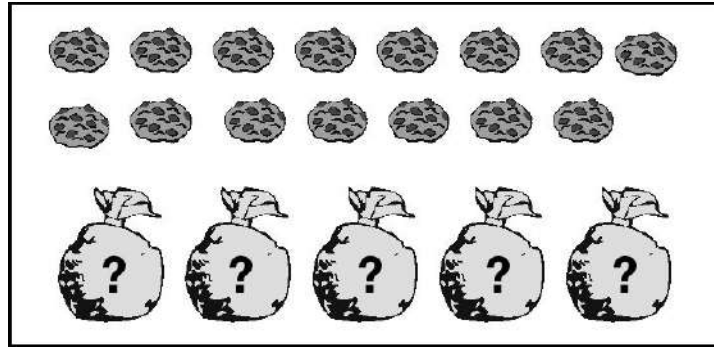
5.5.1. Tipos de división

La división (como inversa del producto) puede proceder de situaciones asimétricas, es el caso del reparto, tasa y comparación, o de situaciones simétricas como la combinación y el producto de medidas. Para las situaciones asimétricas como el reparto, los factores desempeñan un papel diferente por lo que hay dos tipos de divisiones según qué factor actúe de divisor: bien el número de partes o bien el tamaño de la parte. En el caso de grupos repetidos, los dos tipos corresponden a los casos de que se trate: a) determinar el tamaño de cada parte, o b) formar partes de un número fijo ya dado y determinar su número. Al primer tipo de división se le llama división *partitiva*; al segundo tipo división *cuotitiva* o *medida*. En términos de situaciones familiares de reparto equitativo, la división partitiva empieza con una cantidad que se ha de repartir entre un número de partes. El cociente expresa la cantidad que le corresponde a cada parte. Por el contrario, en situaciones de *medida* se conoce la cantidad total y el tamaño de cada parte. El cociente especifica el número de partes.

En consonancia con los tipos de división hay dos grandes tipos de problemas de división que los alumnos de Educación Primaria pueden manejar. Se ejemplifican a continuación en dos contextos: discretos y continuos.

Un ejemplo de problema del primer tipo es el siguiente:

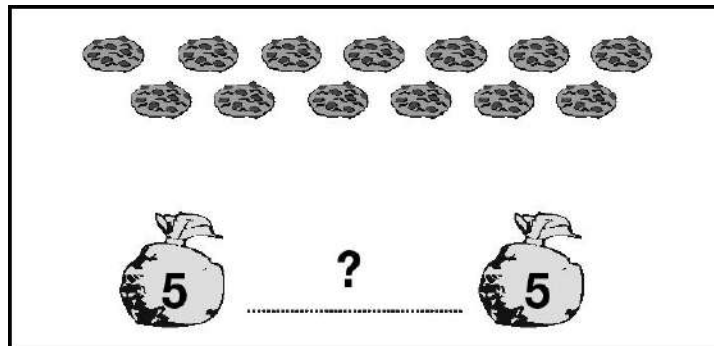
Elena tiene 5 bolsas de caramelos con el mismo número de caramelos en cada bolsa. En total tiene 15 caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en cada bolsa?



En este problema de división se conoce el número total (caramelos) y el número de partes (bolsas) entre las que hay que repartir los caramelos, pero se desconoce el número que corresponde a cada parte. Por lo que este problema corresponde a una división de tipo división partitiva.

Un ejemplo de problema del segundo tipo es el siguiente:

Elena tiene 15 caramelos. Reparte los caramelos en bolsas y coloca 5 caramelos en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas de caramelos forma?



En este problema de división se conoce el número total (caramelos) y el número de caramelos que se colocan en cada parte (bolsa), pero se desconoce el número de partes (bolsas) que se pueden formar. Por lo que este problema corresponde a una división de tipo cuotitiva.

5.5.2. Estrategias de los niños en división partitiva

Los niños cuando resuelven estos problemas idean estrategias informales que modelan el significado de repartir en partes iguales para encontrar el

tamaño de la cantidad a repartir (división partitiva) y también cuando en el reparto se trata de encontrar el número de partes cuando el tamaño de la parte es conocido (división cuotitiva o medida).

Repartiendo

En las situaciones de división partitiva se suelen emplear las dos estrategias siguientes con material manipulativo concreto para modelar y realizar la división:

- *Repartir de uno en uno*: Esta estrategia consiste en formar grupos con los objetos considerados. Para resolver un problema relativo a «repartir 8 objetos entre 4 personas», por ejemplo, un niño puede (1) contar ocho bloques, (2) colocar un bloque en cada una de los cuatro montones, (3) repetir el paso (2) hasta que se repartan todos los bloques, y (4) contar el número de los bloques en uno de los montones.
- *Repartir grupos de objetos*: En la estrategia anterior se procede sistemáticamente. Pero se puede acortar el proceso de reparto asignando más de un bloque en cada uno de los repartos sucesivos y hacer los ajustes necesarios sobre la marcha. Por ejemplo, para repartir 12 entre 3 se puede empezar repartiendo 2 a cada uno y si sobra repartir los que quedan, o bien repartir 5 a cada uno y como faltan repartir sólo 4 a cada uno.

5.5.3. Estrategias de los niños en división cuotitiva

En los problemas de división cuotitiva los niños pueden emplear dos tipos de estrategias informales:

- *Estrategia de medida*: Consiste en formar grupos de un tamaño específico. Si se trata de resolver un problema en el que hay que repartir 12 objetos en partes iguales de tamaño 3, un niño puede adoptar la estrategia de (1) contar 12 bloques, (2) formar un montón de 3, (3) repetir el paso (2) hasta repartir todos los bloques, y (4) contar el número de montones.

- *Substracción repetida:* Otros niños pueden utilizar la estrategia de restar sucesivamente. Por ejemplo, para obtener el número de partes cuando se reparten 12 objetos en grupos de 3, un niño puede hacer lo siguiente: $12 - 3 = 9$, $9 - 3 = 6$, $6 - 3 = 3$, $3 - 3 = 0$. La respuesta la obtiene contando el número de veces que ha restado 3.

5.5.4. La división como reparto

El primer acercamiento a la división en el ámbito escolar se realiza a muy temprana edad a partir de situaciones de *repartos iguales* en situaciones familiares al niño, como son los cumpleaños o los juegos. Una situación típica es el niño que tiene una bolsa de caramelos y los reparte entre sus amigos:

*Ana tiene 18 caramelos. Decide dar igual número a cada una de sus tres amigas.
¿Cuántos caramelos recibe cada una de sus amigas?*

Con respecto a la división como reparto, conviene hacer algunas consideraciones. La primera es que el reparto es una acción familiar para los niños pequeños: reparten caramelos, reparten lápices, reparten libros, reparten juguetes, etc., en situaciones de juego o festivas. Pero la idea de repartir una cantidad de objetos en cantidades más pequeñas se corresponde con la división sólo bajo ciertas restricciones. Primero, la cantidad inicial debe repartirse en partes *iguales*, lo cual no siempre se corresponde con la experiencia de reparto de los niños, el reparto conlleva equidad. Segundo, la experiencia de los niños está más en *compartir cosas con* sus amigos que en *repartir cosas entre* sus amigos. La división se corresponde con *repartir entre* un número de personas. La división $20 : 4$ no puede corresponder a «Tengo 20 manzanas y las comparto entre mis 3 amigos». La división requiere que se repartan las 20 manzanas por igual entre 3 personas. Lo cual es un proceso artificial con el que puede que no estén familiarizados en un principio. Así pues, repartir no siempre corresponde a división, para ello se requiere «repartir por igual entre» un número de personas. Tercero, las situaciones de reparto se aplican a cantidades de objetos y no en situaciones de medida. No se habla de repartir un listón de 20 cm en 3 partes iguales. En este caso se trata de cortar un listón en partes iguales.

5.6. TIPOS DE CANTIDADES

Los números implicados en los problemas de multiplicación y división representan cosas distintas, son de naturaleza distinta. Por ejemplo, el problema, «Ana tiene 3 paquetes de cartas españolas con 40 cartas cada paquete. ¿Cuántas cartas tiene en total?», se puede resolver mediante la expresión $3 \times 40 = 120$. El primer *factor* (3), se refiere al número de grupos iguales que hay, el segundo *factor* (40), se refiere al tamaño de estos grupos y, el tercer número (120), el *producto*, indica el total de unidades entre todos los grupos. Una manera de distinguir las cantidades que intervienen en los problemas y que están asociadas a los dos factores es hablar de cantidades *extensivas* e *intensivas*. En el problema anterior, el número de paquetes, es una cantidad que se puede sumar con otra cantidad de paquetes y se obtiene como resultado una cantidad del mismo tipo. A este tipo de cantidades se les llama cantidades *extensivas*. También lo son el número de euros o el número de caramelos. El segundo factor se refiere al número de cartas por caja, que en ocasiones se representa con la etiqueta «cartas/caja». Este tipo de cantidades se llaman *intensivas* y en ellas se presenta una relación entre dos cantidades, como «euros por caja» o «kilómetros por hora». De manera general, las cantidades intensivas no son sumables.

5.7. CATEGORÍAS DE PROBLEMAS DE MULTIPLICAR O DIVIDIR

Las situaciones descritas anteriormente dan sentido a la multiplicación y a la división. Facilitan el empleo posterior de estas operaciones de manera significativa para resolver problemas. Una vez que los alumnos conocen los significados de las operaciones de multiplicar o dividir, pueden elegir entre una u otra para resolver un problema y emplearlas con sentido en situaciones del mundo real. Por ejemplo, si se trata de resolver el problema:

Juan compra 6 botellas iguales por 24 euros. ¿Cuánto le cuesta cada botella?

Un alumno puede optar por decir, que la botella cuesta 4 euros puesto que $4 \times 6 = 24$. Mientras que otro niño puede decir que la botella cuesta 4

euros puesto que $24 : 6 = 4$. En ambos casos se llega a la solución correcta, debido a que las operaciones de multiplicar y dividir son inversas entre sí y, por tanto, las expresiones $4 \times 6 = 24$ y $24 : 6 = 4$ son equivalentes. En este caso no sabríamos decir si el problema es de multiplicar o dividir, por lo que es aconsejable decir que es un *problema de estructura multiplicativa*, entendiendo con ello que se puede emplear la multiplicación o la división para resolverlo. Estas ideas permiten proponer una clasificación de los problemas que se resuelven con una multiplicación o una división al margen de las operaciones.

5.7.1. Las categorías semánticas

Los distintos tipos de problemas descritos se pueden sintetizar o englobar dentro de tres categorías semánticas que contemplan los significados que toman la multiplicación y la división: *proporcionalidad simple*, *comparación* y *producto cartesiano*. Los problemas de comparación se corresponden con los descritos, los problemas de producto cartesiano engloban a los problemas de combinación y a los de producto de medidas. Los problemas de proporcionalidad simple se detallan a continuación.

Proporcionalidad simple

Los problemas de proporcionalidad simple implican dos magnitudes M y N entre las cuales se establece una relación de proporcionalidad lineal. Se pueden simbolizar como una aplicación f de M en N :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \longrightarrow & N \\ a & \longrightarrow & b = f(a) = e \cdot a \end{array}$$

Dentro de los problemas de proporcionalidad simple se distingue entre aquellos que hacen referencia a la unidad y los que no lo hacen.

Los *problemas de proporcionalidad simple en los que la relación está referida a la unidad u* , son problemas de proporcionalidad en los que una

operación, multiplicación o división, permite su resolución. Se pueden esquematizar así:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ u & \longrightarrow & e \end{array}$$

El caso más general de los problemas de proporcionalidad simple es el que no hace referencia a la unidad, su esquema es:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ d & \longrightarrow & c \end{array}$$

Dentro de los problemas de proporcionalidad simple con presencia de la unidad están los problemas de grupos repetidos y los problemas de tasa. En el problema de grupos repetidos:

Elena tiene 15 caramelos. Reparte los caramelos en bolsas y coloca 3 caramelos en cada bolsa. ¿Cuántas bolsas de caramelos forma?,

la magnitud M son las cantidades de bolsas y la magnitud N se refiere a las cantidades de caramelos, que son directamente proporcionales y, por tanto, una cantidad b de N se puede expresar como producto de la razón de proporcionalidad «e» por una cantidad «a» de M.

$$\begin{array}{ccc} \text{Nº de bolsas} & \longrightarrow & \text{Nº de caramelos} \\ 15 \text{ caramelos} & \longrightarrow & 3 \text{ caramelos en cada bolsa} \times \text{Nº de bolsas} \end{array}$$

En el problema de tasa:

José compró 3 cajas de bombillas a 5 euros por caja. ¿Cuánto le costaron en total las bombillas?

La magnitud M es el número de cajas, la magnitud N es el costo final en euros y la razón de proporcionalidad es la tasa en euros por caja.

Nº de cajas	→	Nº de euros
3 cajas	→	5 euros por caja $\times$ Nº de euros

A partir de este esquema se pueden obtener tres variantes de problemas según cuál sea el dato desconocido: el número de cajas, el número de euros o la tasa de euros por caja.

5.7.2. Dificultad relativa de los tipos de problemas

Los distintos tipos de problemas presentados no tienen todos el mismo nivel de dificultad. Los problemas de comparación y los problemas de combinaciones son más difíciles que los problemas que hemos llamado de proporcionalidad simple (grupos repetidos y tasa).

Dentro de los problemas de comparación hay diferentes niveles de dificultad. La comparación de disminución presenta más dificultad de comprensión que la comparación de aumento. Los niños tienden a representarse la comparación en general en términos de la comparación de aumento. En los problemas enunciados verbalmente la formulación lingüística de la comparación también ofrece distintos índices de dificultad. Una formulación lingüística de la comparación que sea familiar al niño favorece la comprensión de este tipo de problemas. Aún así, los problemas de referente desconocido son más difíciles de comprender, junto con los problemas de comparación de disminución con el escalar desconocido.

5.8. ERRORES Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

La multiplicación se introduce en el currículo escolar generalmente en segundo o tercer curso de Educación Primaria y se trata como una adición repetida. Hay niños que comprenden la multiplicación cuando se introduce en estos niveles, pero también hay otros que tienen dificultades durante toda la etapa escolar. Se aconseja que para que el aprendizaje de la multiplicación

sea significativo, se haga mediante sumas reiteradas, esto puede crear (como se ha demostrado) un conflicto cognitivo posteriormente, cuando se pretenda extender la división a otros conjuntos numéricos como los decimales. Considerando que este es el modelo intuitivo que menos dificultad inicial presenta, el profesor ha de estar atento para resolver este conflicto, si aparece.

La dificultad al pasar desde los problemas que entrañan sólo números enteros hacia problemas con números decimales, no es sólo una situación de ampliación del campo numérico. En el primer caso, de los números enteros, se crea un patrón en el que se diferencian el efecto de multiplicando y multiplicador, «las veces» se corresponde con un número entero, este patrón también crea conflicto posteriormente, al resolver un problema o plantear un problema con números decimales. Para problemas de división la situación es mucho más compleja.

Hay muchos errores que se deben a la sobregeneralización de experiencias en el dominio de los enteros, uno muy notable se debe a que *la multiplicación hace mayor y la división menor, y otro que la división se hace siempre del número más grande al número más pequeño.*

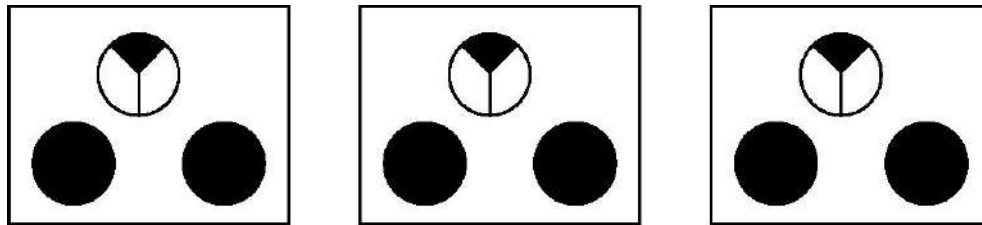
Otros errores se deben a la no comprensión de las operaciones.

Conocer los hechos numéricos y no comprender el significado de las operaciones: ejemplo, saber calcular $6 + 3$, pero si se les pide que inventen un problema para este producto, pueden dar enunciados como: «Hay 6 patos en el estanque y mientras comían vienen 3 más. ¿Cuántos hay ahora?».

5.9. EL RESTO EN UNA DIVISIÓN ENTERA

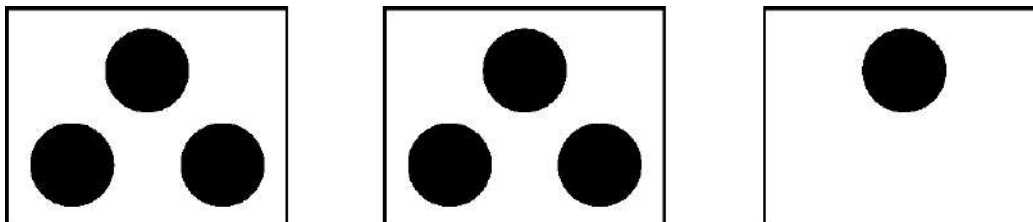
Cuando se trabaja la división entera el resto se trata bien como una cantidad sobrante o bien se expresa en forma fraccionaria. Por ejemplo, la división $7 : 3$, si se interpreta como división partitiva, se puede escribir en forma fraccionaria $7 : 3 = 2 + 1/3$, es decir, el resultado que corresponde a cada parte es dos unidades y un tercio de unidad.

División partitiva



Pero si se interpreta como división cuotitiva, en la que se van formando grupos de tres, se obtienen dos grupos de tres y un grupo con un elemento.

División cuotitiva



Cuando se resuelven problemas reales en los que aparecen restos hay que tomar algunas decisiones adicionales que afectan a la respuesta dada:

- Desechar el resto.
- La respuesta se redondea al número natural siguiente.

El siguiente ejemplo ilustra estas dos ideas:

Un coche tiene cabida sólo para 5 personas. ¿Cuántos viajes como mínimo tiene que dar para transportar a 17 personas?

Para poder transportar a todas las personas en un mínimo de tiempo, el coche se ve forzado a realizar un viaje más con los dos pasajeros sobrantes.

A los alumnos hay que hacerles que resuelvan problemas en los que tengan que tomar decisiones razonables.

5.10. BIBLIOGRAFÍA

- Anghileri, J. (1989). «An investigation of young children's understanding of multiplication». *Educational Studies in Mathematics*, 20, 367-385.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
- Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Clark, F. B. y Kamii, C. (1996). «Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5». *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51.
- Greer, B. (1992). «Multiplication and division as models of situations». En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on learning and teaching mathematics* (pp. 276-295). New York: Macmillan.
- Nesher, P. (1988). «Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings». En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Ed. Síntesis.
- Schwartz, J. L. (1988). «Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations». En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM.
- Vergnaud, G. (1983). «Multiplicative structures». En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.
- Vergnaud, G. (1988). «Multiplicative structures». En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

6

Enseñando a multiplicar y dividir

Encarnación Castro Martínez • Enrique Castro Martínez • Luis Rico Romero

6.1. LA ENSEÑANZA DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

Desde hace algunos años se están introduciendo cambios importantes en la educación matemática escolar. Dichos cambios están estrechamente vinculados a una nueva concepción de la matemática que se está imponiendo y afectan al contenido matemático que han de trabajar los alumnos, al enfoque dado a este contenido, a la metodología puesta en juego en su enseñanza y, por supuesto, a los objetivos a conseguir mediante el aprendizaje matemático.

La concepción de la matemática ha ido evolucionando y, de considerarse como una colección de conceptos y habilidades aisladas que han de ser aprendidas por los alumnos como única meta de la educación matemática, está pasando a considerarse como un dominio y una forma de pensamiento relacionado directamente con la actividad humana. La nueva visión de la matemática centra el interés de la enseñanza de la misma en la resolución de

problemas, acompañada en la mayor parte de los casos de una actividad de modelización de situaciones reales.

En lo que se refiere al contenido matemático en los niveles inferiores del sistema educativo, se sigue hablando de números naturales y operaciones básicas con dichos números, entre las que se encuentran la multiplicación y la división. No obstante, el énfasis no se pone en el aprendizaje de los algoritmos de estas operaciones que quedan relegados a un plano secundario, sino en una serie de competencias que permitan a los individuos adquirir *sentido numérico*. Entre dichas competencias están: establecer relaciones entre los números mediante las operaciones de multiplicar y dividir, hacer cálculo mental con estas operaciones, realizar estimaciones y cálculo aproximado, utilizar las operaciones de producto y división para modelizar hechos y situaciones reales, y dar soluciones significativas a los problemas que estas operaciones resuelven.

Los cambios señalados, en tanto afecten al punto de vista que el profesor adopte sobre la enseñanza/aprendizaje de la matemática, incidirán directamente en su metodología lo que repercutirá directamente en el aula. Se aconseja que en el proceso de aprendizaje de la estructura multiplicativa, los alumnos recorran el camino que les lleve desde las situaciones concretas y los fenómenos en los que estas operaciones estén implicadas a los conceptos abstractos. El comienzo se hará con actividades manipulativas utilizando material concreto, se seguirá realizando actividades en situaciones figuradas, como son las representaciones en el papel, de aquí se pasará a realizar generalizaciones de conceptos y propiedades de forma verbal y, posteriormente, se expresarán estas generalizaciones simbólicamente. Todo este proceso ocupa una cantidad de tiempo considerable, comenzando en la última etapa de Infantil y adentrándose entre tres y cuatro cursos de Primaria. En su introducción se utilizarán números pequeños y se irán aumentando progresivamente adaptándose a la capacidad de manejo de éstos por los alumnos.

En lo que al aprendizaje se refiere, frente a las posturas que consideraban que el alumno adquiere su formación mediante la información que le proporcionan otras personas, casi siempre el profesor, las nuevas tendencias dan más importancia al trabajo del que aprende y sostienen que el aprendiz ha de participar, de manera activa, en su aprendizaje, ha de descubrir y crear

conocimiento en el transcurso de actividades concretas preparadas para tal fin.

Uno de los objetivos centrales del aprendizaje en la disciplina matemática, para esta nueva corriente es conseguir en los estudiantes mayor capacitación matemática, y en lo que se refiere al estudio de los números y las operaciones básicas, entre las que se encuentran la multiplicación y la división. Se considera que el mayor reto para la enseñanza de las matemáticas en la escuela elemental debe ser el desarrollo del *sentido numérico*.

6.2. CONSIDERACIONES DE TIPO CURRICULAR

El currículo de matemáticas escolar incluye como contenido los números y la aritmética. En el desarrollo de este contenido cabe contemplar cinco apartados, que aunque diferenciados, están muy relacionadas entre sí: los conceptos de número y el sentido numérico; las operaciones aritméticas básicas y sus propiedades; el dominio de los hechos aritméticos básicos; el cálculo mental y escrito y la aplicación del conocimiento y las habilidades numéricas y aritméticas a la resolución de problemas.

6.3. SENTIDO NUMÉRICO

Se considera que una persona tiene sentido numérico si posee una buena intuición sobre los números, la variedad de sus usos y sus diferentes interpretaciones. Esto traducido a competencias quiere decir, poseer habilidad para reconocer la magnitud relativa de los números y el efecto de operar con ellos, haber desarrollado referentes con los que comparar cantidades y medidas, poder detectar errores aritméticos cometidos, saber establecer relaciones, conocer cómo y cuándo usar los números y las

operaciones, habilidad para apreciar los distintos niveles de exactitud exigidos en función de la situación en la que aparecen.

Los sujetos que poseen sentido numérico desarrollado son capaces de realizar un cálculo mental flexible, estimaciones numéricas y juicios cuantitativos. Hacer un cálculo mental flexible requiere el reconocimiento de las equivalencias necesarias para reagrupar los números de manera que se facilite una determinada operación mental. Para efectuar estimaciones numéricas aceptables es importante poseer conocimiento de valores numéricos aproximados y utilizarlos en los cálculos, casi siempre mentales. Para los juicios cuantitativos es necesario juzgar las cantidades y hacer inferencias acerca de los valores numéricos. Todo esto exige no tener pereza para operar mentalmente.

En términos de estructura, se hace referencia a que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada, propia de cada individuo, por la cual es capaz de relacionar números y propiedades de las operaciones para resolver problemas con números de manera flexible y creativa.

El sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de la exploración del número en todas sus posibilidades de uso y sus formas de operar. Las operaciones de multiplicar y dividir contribuirán a este desarrollo si su enseñanza no se ciñe exclusivamente a los algoritmos tradicionales, y en la misma se tienen en cuenta la visualización de estas operaciones mediante diferentes representaciones y modelos, si se consideran los diferentes contextos en los que se puede aplicar el uso de estas operaciones tratando de conseguir su asociación a las diferentes situaciones y se pone énfasis especial en la utilización del cálculo mental.

6.4. REPRESENTACIONES Y MODELOS

Para que una persona pueda pensar y razonar en el contexto de la estructura multiplicativa es necesario que posea una representación mental de la misma que le permita operar en ella. Así mismo, para comunicar las ideas matemáticas relacionadas con dicha estructura, es necesaria una representación externa. En este caso, consideramos como representaciones

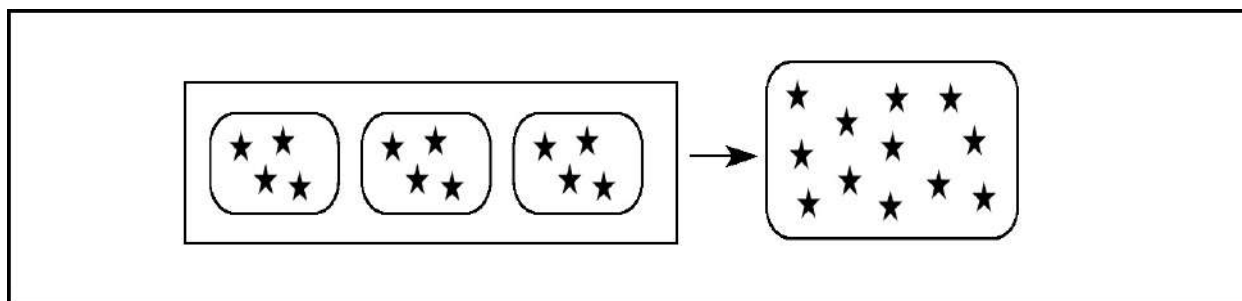
externas para las operaciones de multiplicación y división, la expresión hablada que tenga relación con estas operaciones y las expresiones simbólicas de ellas.

Por otra parte, un modelo se puede considerar como una esquematización abstracta de la realidad, que la recrea fielmente. Los modelos en educación matemática sirven para producir y comunicar ideas matemáticas e intervienen en la actividad de construcción de nuevos conceptos. Los modelos usados para esquematizar la multiplicación y la división permiten hacer abstracción de estos conceptos. Se pueden utilizar distintos modelos para la enseñanza de la multiplicación y la división, a veces dependerá de la situación a que se haga referencia. Presentamos algunos tipos de modelos agrupados por familias.

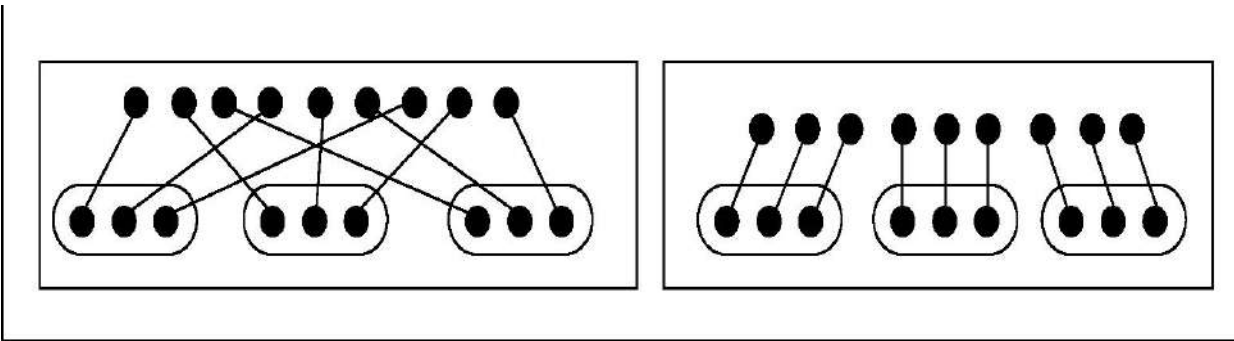
6.4.1. Modelos cardinales

Se trata de una familia de modelos en los que los números con los que se opera aparecen como colecciones de objetos separados, lo que hace que se les considere como modelos discretos.

1. Una colección de grupos iguales se utiliza para la multiplicación, considerada como suma reiterada de sumandos iguales. La situación: «*3 niños tienen cada uno 4 soldados de plomo. ¿Cuántos soldados tienen entre todos?*» puede ilustrarse bien con este tipo de modelo.

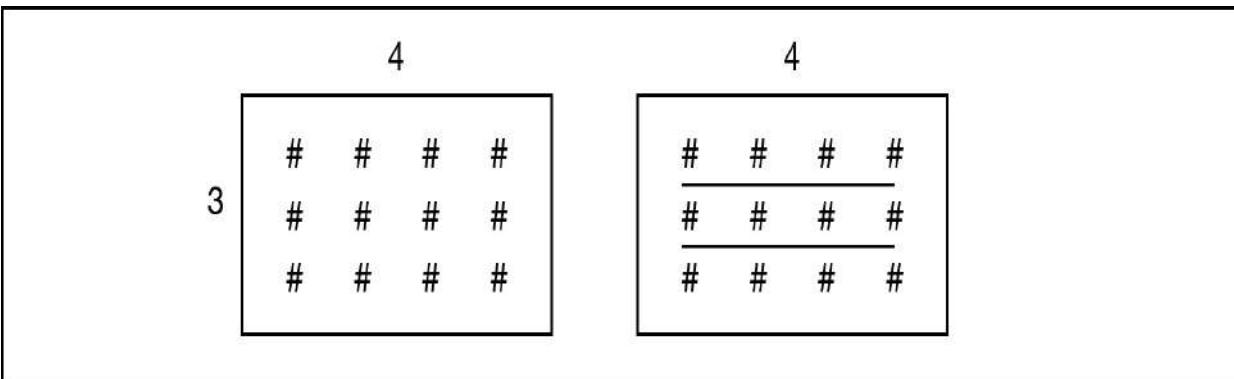


Con el mismo tipo de modelo, para la división, se puede poner de manifiesto cómo 9 objetos se distribuyen en 3 colecciones, de dos formas diferentes.



En primer lugar corresponde al caso: «*Se reparten 9 canicas entre 3 montones. ¿Cuántas canicas hay en cada montón?*». El segundo, muestra la situación: «*Con 9 canicas se quieren hacer montones de 3. ¿Cuántos montones se pueden hacer?*». En el primer caso se van repartiendo los objetos uno a uno entre los 3 montones, en el segundo caso se van haciendo los montones de 3, hasta que no quedan canicas.

2. Una matriz en la que las filas y las columnas corresponden con los factores de una multiplicación, la matriz completa es el resultado del producto. Situaciones como: «*En un aula los pupitres están dispuestos en filas y en columnas, hay 3 filas y 4 columnas. ¿Cuántos pupitres hay en el aula que estamos considerando?*».

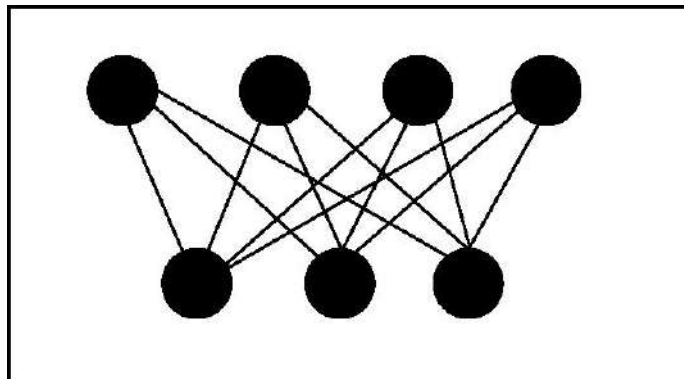


Para la división, con este mismo modelo, se dispone la matriz y se hace una partición por filas o por columnas, la situación inversa de la anterior: «*En un aula donde los pupitres están colocados en filas y columnas, hay 12 pupitres y 4 columnas. ¿Cuántas filas hay?*».

3. Producto cartesiano. A partir de dos colecciones de objetos, se forman todas las parejas posibles entre sus elementos. La ilustración muestra la situación: «¿De cuántas formas distintas puede merendar una persona si en la cafetería donde se encuentra sólo hay como bebidas café y ColaCao y como repostería caracola, suizo y rosquilla?». Para el caso de la división, con este modelo, serán conocidos los distintos tipos de merienda y sólo las bebidas o los pasteles, y hay que encontrar los pasteles o las bebidas respectivamente.

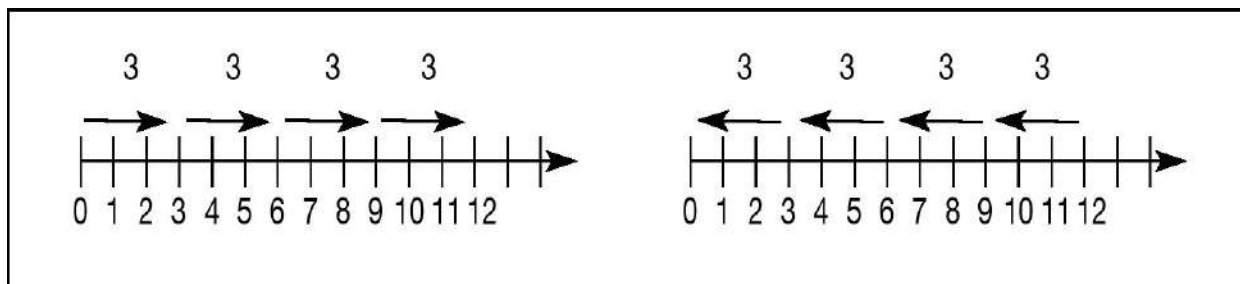
4. De forma más abstracta: «Hallar las combinaciones posibles de una colección de 4 objetos y una colección de 3 objetos».



El producto viene indicado por el número de líneas posibles a trazar entre los objetos de las dos colecciones.

6.4.2. Modelo lineal

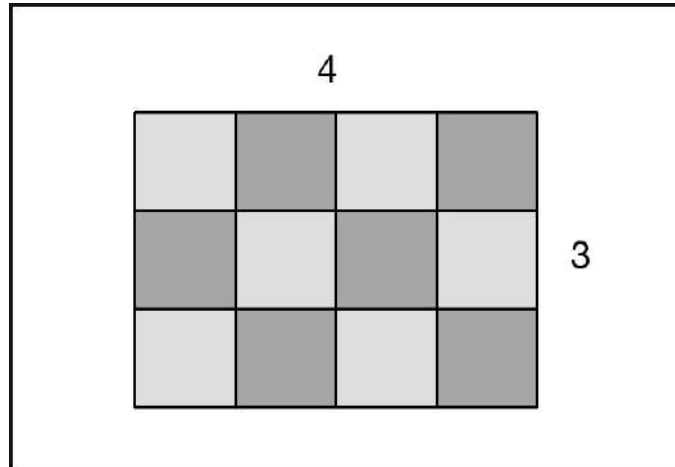
La recta es un modelo continuo. Su representación en el papel, se puede utilizar tanto para recrear la multiplicación como la división. En una recta en la que aparezcan representados los números, el producto $n \times a$ aparecerá como un intervalo de a unidades repetido n veces. El resultado es el último punto al que se accede. Para la división $m : d$ se conoce m que indica la longitud a tomar en la recta, a partir de ella se van haciendo intervalos de d elementos contando hacia atrás, hasta agotar la longitud. En la figura aparece, en primer lugar, sobre una recta la multiplicación de 3×4 , en el recorrido de la recta hacia la derecha, 4 pasos de 3 unidades cada uno, se aprecia el producto como suma reiterada; en segundo lugar, la división $12 : 3$ como pasos recorridos hacia la izquierda, 4 pasos de 3 unidades cada uno. Ilustra la división como resta reiterada.



6.4.3. Modelo de área

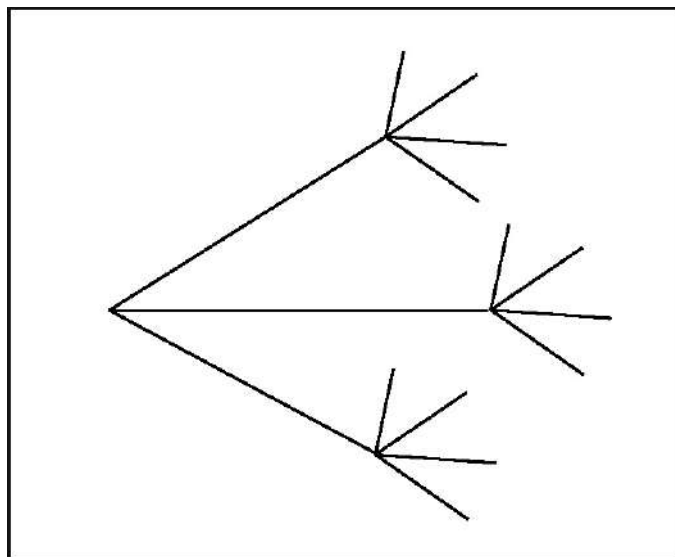
También es un modelo continuo como el de la recta pero en dos dimensiones, se basa en la noción de área de un rectángulo. En este caso las dimensiones del rectángulo coinciden con los factores que se han de multiplicar. La figura siguiente representa un modelo de área que traduce el producto de 4×3 , puede indicar: «Las losas necesarias para cubrir un suelo rectangular si por el lado más largo caben 4 losas y por el más estrecho caben 3». La división se expresa mediante este modelo cuando se conoce el área del rectángulo y una de sus dimensiones y hay que encontrar la otra

dimensión: «Para cubrir el suelo de una habitación rectangular son necesarias 12 losas, por un lado se pueden poner 4. ¿Cuántas se pueden poner por el otro?».



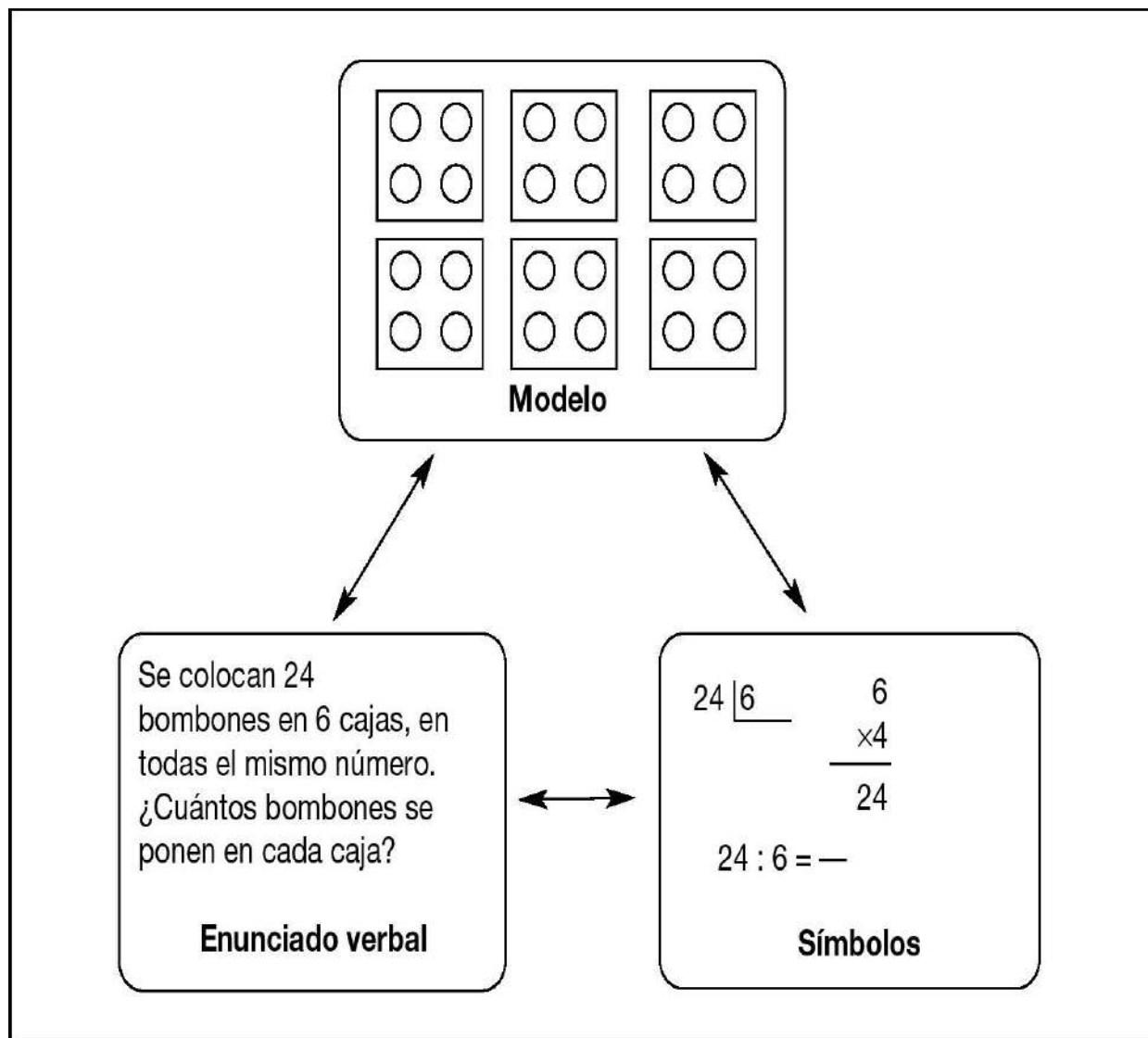
6.4.4. Modelo de árbol

Se trata de un esquema ramificado. Desde un punto inicial parten distintas ramas y de cada una de ellas otras, el mismo número en todos y cada uno de los casos. El modelo de la ilustración esquematiza el producto 3×4 cuyo resultado es los distintos trazados, de dos tramos, que se pueden seguir partiendo del vértice inicial y siguiendo todas las ramificaciones posibles. Una situación asociada a este modelo puede ser: «En un juego de “rompecabezas” una bola que parte de la salida puede entrar por 3 carriles distintos, cada uno de ellos, a su vez, se bifurca en 4 carriles cada uno que desembocan en la meta. ¿Por cuántos carriles puede pasar la bola para llegar a la meta?».



6.4.5. Translaciones: Modelos, lenguaje natural y símbolos

Cuando se aprenden las operaciones, es útil pensar en ellas empleando distintas formas de expresión y de representación: modelos, enunciados de problemas y expresiones simbólicas. Cada representación puede utilizarse en la enseñanza de los conceptos de multiplicar y dividir para ilustrar la relación que expresa una operación y el paso de una representación a otra es una forma de dar significado a dicha operación. Una vez que el alumno se ha familiarizado con los modelos y los enunciados de problemas se puede iniciar en la traducción entre estas representaciones.



Los ejercicios de traducción se refieren a presentar una de las formas de expresión y pedir que se exprese con las otras dos formas de representar la relación. Por ejemplo, dada la expresión $4 \times 6 = 24$, se ha de inventar un problema y representarlo con un dibujo. Este tipo de tareas se puede realizar de manera individual o en grupo y sirve como fuente de comunicación entre los alumnos.

6.5. RECURSOS

Los recursos que se pueden utilizar en el aula para trabajar los conceptos de multiplicación y división son diversos tanto en su naturaleza como en la forma de su uso, por ejemplo: objetos separados como pueden ser canicas o caramelos, permiten reunir un número determinado de colecciones de objetos en una sola colección, o realizar un reparto de objetos en partes iguales, esto es hacer la operación manipulativamente. Las regletas de Cuisenaire o números en color que constituyen un modelo de medida para los números, permiten trabajar el producto y la división de números cuando se trata de números pequeños. Con el ábaco se realizan las operaciones de multiplicar y dividir, en muchos casos los números con los que se opera hay que descomponerlos en las unidades de distinto orden que los forman, lo que contribuye a dar sentido a dichos números. Juegos de mesa en los que las reglas del juego obligan a realizar los cálculos de multiplicación o de división, ya sea con lápiz y papel, ya sea mentalmente o con calculadora, pueden utilizarse para adquirir dominio en la realización de las operaciones. El uso adecuado de la calculadora básica puede potenciar la comprensión de los conceptos involucrados en la estructura multiplicativa. Con un tipo de calculadora se puede mostrar la multiplicación como suma repetida si se teclea un número y a continuación dos veces el signo más, las veces que se teclee el signo igual es el número de veces que se repite como sumando el número considerado, así: $5 + + = = =$ da un resultado de 3 veces 5, o sea, 15. En lo que se refiere a la división como resta repetida para dos números uno múltiplo del otro, se escriben separados por dos veces el signo menos y se pulsa el signo igual tantas veces como sea necesario para llegar a 0, así: $18 - - 6 = = =$ el resultado da 0, el cociente es el número de veces que se repite el signo $=$, en este caso de dividir 18 entre 6, es 3.

6.5.1. Uso de la calculadora

En la línea de priorizar el desarrollo del sentido numérico que estamos comentando, se considera dar menos importancia a las rutinas de cálculo y a los cálculos excesivamente largos. No tiene interés matemático ni aporta nada al aprendizaje de la estructura multiplicativa la realización manual de una multiplicación, o una división, de dos números si éstos tienen más de tres cifras. Para estos cálculos es bueno el uso de la calculadora. Para números más pequeños, consideramos que la calculadora ha de cumplir una

función de asistente, lo que conlleva su utilización para comprobaciones en lugar de para realización de cálculos directos.

Tomar la calculadora simplemente para realizar los cálculos de multiplicar o de dividir, disminuye la práctica con los algoritmos correspondientes, lo cual va en detrimento de la adquisición de las destrezas manuales de estos algoritmos. A veces, cuando un estudiante trabaja en la resolución de un problema el cual requiere una multiplicación o división larga y se dedica a hacerla manualmente, pierde la idea que le llevó a realizar dicha operación, lo que le hace fracasar y no culminar su tarea; en estos casos, el uso de la calculadora se muestra eficaz. Si el objetivo que se pretende es, no sólo que el estudiante sepa el algoritmo de la multiplicación o la división, sino la aplicación de estos cálculos para llegar a algún resultado, el uso de la calculadora es adecuado. Al hacer uso de la calculadora, se libera tiempo que se podrá dedicar a profundizar en la idea central de la tarea. Indicamos algunas tareas, a realizar con la calculadora, que pueden proporcionar a los estudiantes sentido numérico:

- Efectuar multiplicaciones y divisiones de forma mental y comprobar con la calculadora los resultados, controlando por sí mismos sus aciertos y errores; esta práctica les permitirá descubrir y formar sus propias estrategias para realizar cálculo mental.

Actividades

- Escribe el número 36 como resultado de realizar operaciones de multiplicar y dividir con otros números, por ejemplo: $36 = 3 \times 2 \times 2 \times 3$, $36 = 72 : 2$. Escribir tres casos más. Comprueba con la calculadora que lo has hecho correctamente.
- Utiliza la calculadora para encontrar números de una cifra que operando con ellos mediante la multiplicación y la división se obtengan los números 45, 126.
- Realiza mentalmente las operaciones 45×12 , 753×22 , $48 : 4$, $225 : 6$. Comprueba con la calculadora los resultados obtenidos.

- Encontrar relaciones numéricas e inferir reglas como la siguiente: «Multiplicar un número por 5 y el resultado por 2, o viceversa, equivale a multiplicar por 10». Se trata de un caso especial de la propiedad asociativa, que proporciona una relación importante para el cálculo mental.

Actividad

- Con la calculadora multiplica 6×2 , multiplica el resultado por 5.
- Anota en el cuaderno el resultado. Realiza con la calculadora 6×10 .
- Compara el resultado con el que tienes anotado.
- Repite el proceso cambiando el 6 por otro número.
- Infiere una regla.

- Tantear los factores en los que se puede descomponer un número, trabajando así los divisores de dicho número.

Actividad

- El número 135 se puede escribir como producto de otros tres. Encuentra esos números con la calculadora.

$$\times \square \times \square \times \square = 135$$

- Sistematizar el producto por la unidad seguida de ceros.

Actividad

- Realiza con la calculadora los productos 5×10 , 26×100 , 9×100 , 48×10 .

- Realiza con la calculadora cuatro productos, distintos de los anteriores, en los que uno de los factores sea la unidad seguida de ceros.
- Infiere una regla.

- Repasar conceptos y relaciones.

Actividad

- Escribe en la calculadora 5 centenas, más 3 decenas, más 5 unidades.
- Lee el número que resulta.

- Comprobar resultados obtenidos al resolver problemas, esto ayuda en la adquisición de la habilidad para reconocer si un resultado es o no razonable.
- Resolver problemas de manera significativa en los que pueden entrar grandes números que supondría un engorro realizar con papel y lápiz.
- La calculadora se puede utilizar a modo de árbitro, en algunos juegos, por ejemplo en el siguiente para comprobar si hay o no acierto.

42	12	64	35	5
0	48	72	27	14
24	21	15	54	16
18	49	32	63	10
56	28	45	30	36

El juego consta de un tablero de 5 x 5 casillas en las que aparecen números (la condición que han de cumplir es que sean producto de otros dos) y fichas de cuatro colores. Pueden jugar dos, tres o cuatro jugadores, cada jugador tiene las fichas de un color. Un jugador para ocupar una casilla con una ficha ha de decir dos números que multiplicados entre sí den como resultado el que hay en la casilla. Gana el niño que consiga colocar más fichas. La calculadora indicará si la propuesta hecha por un jugador es correcta.

6.6. LOS CONCEPTOS DE MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN LA ENSEÑANZA

En la enseñanza de la multiplicación y la división hay que hacer una distinción entre el concepto y el algoritmo, el primero está relacionado con las ideas, el segundo pertenece a las rutinas, a los procedimientos. Las operaciones de multiplicar y dividir constituyen la base de la estructura multiplicativa, conceptualmente están unidas siendo una la inversa de la otra; para que se perciba esta relación su estudio debe de hacerse conjuntamente. No ocurre así con los algoritmos de la multiplicación y la división que exigen requisitos y habilidades distintas y mucho tiempo para consolidar dichas habilidades, lo que aconseja que su mecanización se haga

de forma independiente para centrar más firmemente la atención en cada uno de los algoritmos y evitar posibles confusiones.

Para la introducción de los conceptos, es conveniente presentar situaciones intuitivas con números pequeños que requieran de una multiplicación o división y que se puedan resolver con sumas reiteradas o repartos iguales de forma manipulativa. Aumentar progresivamente los números para crear la necesidad de un procedimiento que facilite el cálculo, que ha de ser distinto del anterior, e introducir de esta forma los nuevos algoritmos.

6.6.1. Dobles y triples-mitades y tercios

Duplicar o triplicar un número o una cantidad es una acción que prepara para la comprensión de la multiplicación por dos y por tres, partir en dos o tres partes iguales prepara para la división entre dos y tres. Considerando distintos modelos y representaciones y cambiando el lugar de la pregunta, se pueden plantear diversas actividades relacionadas con doble y triple, las nociones de mitad y tercio por estar más ligadas a las fracciones tienen aquí menos peso aunque deben de trabajarse como inversas de las anteriores.

Hacer el doble o triple de un número o colección dada; reconocer de qué número o colección es doble o triple uno dado, en una situación de juego; pedir el doble/triple de las canicas que un niño tiene en una mano; representar el doble de las canicas que hay representadas en el papel; reconocer entre varias una cantidad que sea doble/triple de otra dada; plantear problemas en los que aparezcan estas nociones de doble o triple, son algunos casos. En cuanto a mitad y tercio, reconocer si una figura, o cantidad, está dividida en mitades o tercios, dividir una figura, o cantidad, en mitades y tercios, son situaciones con las que plantear actividades.

6.7. HECHOS NUMÉRICOS BÁSICOS DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

Los hechos numéricos básicos de la multiplicación son los resultados de multiplicar dos números de una sola cifra, estos hechos básicos están recogidos en la tabla de multiplicar. Los hechos numéricos básicos de la suma no necesitan de gran esfuerzo para ser memorizados debido a que los resultados de sumar dos números de una sola cifra es siempre un número menor que 20. Dado la rapidez de crecimiento del resultado del producto de dos números, complica el resultado y surge la necesidad de memorizar estos hechos numéricos o disponer de una tabla que los recoja de forma organizada y fácilmente manejable. Las tablas de multiplicar no es necesario que se memoricen en un tiempo determinado, se puede obtener un resultado numérico de un producto mediante conteo o sumando, sin embargo, es aconsejable su memorización a través de su uso de forma espaciada en un tiempo, pues proporciona comodidad al hacer cálculo con papel y lápiz y para hacer cálculo mental.

Más interesante que la memorización de las tablas, se considera la adquisición de técnicas para construirlas en un momento determinado. Se hace una introducción a estas técnicas cuando se realizan series ascendentes o descendentes de n en n , sumando o restando para llegar al siguiente número de la serie, representando dichas series en una resta numérica o en otro modelo, o bien haciéndolo mentalmente. En lo que sigue ejemplificamos con el número dos, pero se puede extender a cualquier otro número menor o igual que nueve. La serie creciente de dos en dos además de escribirla y representarla en un soporte real, es conveniente recitarla de memoria ya que esta situación es mucho más rica que las anteriores. Cuando la suma se hace mentalmente y se recita la secuencia, hay que recordar y añadir los números de memoria, esta acción es más compleja que si los números están escritos.

Actividad

- Rellenar los números que faltan: 1 __ 3 __ 5 __ 7 __ 9 __ 11 __ 13 __ 15 __ 17 __ 19 __
- Escribir de dos en dos, desde 10 hasta 20.
- Recitar de dos en dos, desde 2 hasta 20.

- Realizar las sumas $2 + 2 = \underline{\quad}$, $3 + 3 = \underline{\quad}$, $4 + 4 = \underline{\quad}$, $5 + 5 = \underline{\quad}$, $6 + 6 = \underline{\quad}$, $7 + 7 = \underline{\quad}$, $8 + 8 = \underline{\quad}$, $9 + 9 = \underline{\quad}$
- Construir la tabla de multiplicar del 2 mediante sumas utilizando la recta numérica, desde el principio o partiendo de un producto conocido en la tabla.
- Descubrir en qué caso los números que hay en los recuadros son todos resultados de la tabla del 2.

9	22
13	

18	20
14	

8	15
12	

6.7.1. Las tablas de multiplicar

La memorización de las tablas de multiplicar permite resolver de forma rápida cálculos sencillos. Contar de n en n es la forma de construir la tabla de multiplicar por n y permite comprender el hecho de que la multiplicación es, entre otras cosas, una forma resumida de representar y realizar una suma de sumandos repetidos. Permite, además, utilizar esta idea para realizar algún producto si se olvida la respuesta inmediata.

Las tablas de los nueve primeros números (véase figura) presentada en un diagrama cartesiano proporciona posibilidades para establecer relaciones numéricas interesantes. La tabla total como aparece en la figura se puede usar para conocer el producto de dos números, ejemplo 4×8 , el resultado de este producto se encuentra donde se cruzan la fila cuyo comienzo está en el 4 y la columna encabezada por el 8. Esto ocurre para dos números cualesquiera **a** y **b** de una sola cifra. También se visualiza la división de un número de dos cifras entre uno de una sola cifra, así para $28 : 4$, se busca en la fila encabezada por el 4, donde se encuentra 28, la cabeza de la columna que se une en 28 con la fila del 4, es el resultado. Esto ocurre en todos aquellos casos en los que el número de una sola cifra considerado es divisor del de dos cifras.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Si se trata de una división entera como $43 : 5$, se busca en la fila del 5, dado que 43 no está en dicha fila, se toma el número más cercano. Si el número es menor que 43, en este caso 40, la cabecera de la columna considerada es 8 y la división se dice por defecto. Si se toma 45, que es mayor, el cociente o resultado es 9, y en este caso se tiene una división por exceso. La relación entre la división entera por defecto y por exceso se visualiza aportando comprensión a dicha relación.

Algunas de las relaciones numéricas sencillas que se pueden establecer analizando la tabla son:

- En cada fila, o columna, aparecen las tablas individuales de los números apreciándose su formación por suma repetida; el paso de un número al siguiente se hace sumando siempre el número que

encabeza dicha fila o columna, de aquí se desprenden relaciones como la siguiente: 7×9 es equivalente a $7 \times 8 + 7$.

- La singularidad de la formación de la tabla del 9, como caso especial, en donde la pareja de números que va apareciendo a partir de 9 aumenta uno en la cifra de las decenas y disminuye uno en la cifra de las unidades: 9, 18, 27, 36...
- La colocación de los cuadrados perfectos en la diagonal de la tabla. Esto unido al estudio de los divisores de los números que hay en el interior de la misma, lleva a la propiedad: *Sólo los números cuadrados perfectos tienen un número impar de divisores.*
- La simetría de la tabla respecto a dicha diagonal. Es una forma de visualizar la propiedad conmutativa del producto.
- Mirando las filas, o las columnas, encabezadas por los números pares se aprecia que los resultados son siempre pares, y mirando las encabezadas por números impares, se observa que van cambiando uno par y otro impar; esto permite llegar a la propiedad: *El producto de dos números solamente es impar cuando los dos factores sean impares.*

6.8. ENSEÑANZA DEL CÁLCULO MENTAL

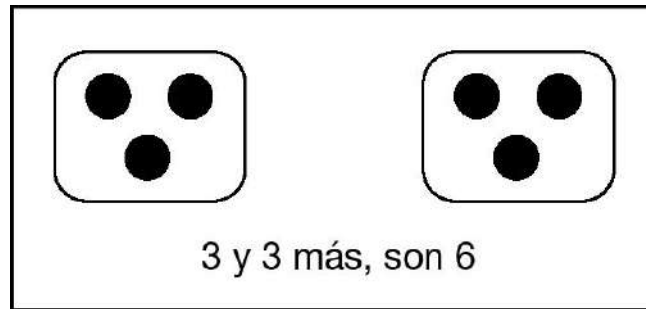
Es imprescindible que en la enseñanza de la multiplicación y la división se trabaje el cálculo mental si se pretende crear mentes ágiles para el cálculo. El trabajo con cálculo mental requiere una forma de hacer distinta que cuando se hace de forma escrita. Un requisito inicial está en el número de interlocutores necesarios para su realización que son dos, como mínimo, uno preguntará y el otro responderá, uno de los interlocutores puede ser el profesor, pero puede realizarse entre los propios alumnos. No es necesario el lápiz y el papel para hacer cálculo mental, a menos que se anoten los resultados para su comprobación. Requiere de técnicas y destrezas que a veces serán recomendaciones hechas por el profesor, pero en la mayoría de los casos son relaciones establecidas por los propios alumnos mediante la práctica realizada. Si no se ha practicado cálculo mental desde el comienzo

del aprendizaje, cuando se introduce en él a los alumnos tienden a hacer los cálculos como si los vieran escritos en su mente. Si se trabaja el cálculo mental en edades tempranas aparecen estrategias propias cada vez más eficaces. Es conveniente comenzar con situaciones sencillas en las que la estrategia a emplear se aprecie fácilmente, como:

- Productos que se obtienen como un doble y una suma:
 6×2 que se puede realizar como $5 \times 2 + 2$.
 15×3 puede verse como $15 \times 2 + 15$.
 14×3 , si se conoce 15×3 , es rápido como $15 \times 3 - 3$.
- Productos que den la unidad seguida de ceros, o multiplicar por la unidad seguida de ceros:
 25×4 , doble de 25 es 50 y doble de 50 es 100.
 400×7 , es el producto de 4×7 añadiéndole los dos ceros de las centenas.
- Multiplicar por 5 y el resultado por 2, comprobando que equivale a multiplicar por 10, $5 \times (2n) = 10n$ caso particular de la propiedad asociativa, son preparatorios en la introducción del cálculo mental sencillo.

6.9. ENSEÑANZA DEL CÁLCULO ESCRITO

Si la introducción de la multiplicación se hace desde una suma de sumandos repetidos, hay que pasar, de manera progresiva, a la expresión simbólica de la multiplicación. Proponemos el proceso para el producto por dos desde la expresión oral o hablada a la simbólica.



Ante un modelo discreto como el de la figura anterior, se puede plantear la siguiente secuencia que se introducirá de forma progresiva:

- 3 caramelos más 3 caramelos es igual a 6 caramelos.
- 3 más 3 es dos veces 3 y es igual que 6.
- $3 + 3$ es dos veces 3 y es igual a 6.
- $3 + 3 = \text{dos veces } 3 = 6$.
- $3 + 3 = \text{dos veces tres y se escribe } 2 \times 3 = 6$.
- $3 + 3 = 2 \times 3 = 6$.

Esta secuencia no se introducirá toda de una vez sino en tiempos distintos, conforme los alumnos la vayan aprendiendo porque hayan asimilado la situación previa. Secuencias semejantes se repetirán con otros números hasta identificar *veces* con *por* y *por* con $\times$ y conseguir la transformación $n + n + \dots^{(k)} + n = k \times n$.

La multiplicación de un número de una cifra por otro de dos cifras conviene introducirla haciendo la descomposición en unidades y decenas del número de dos cifras y sumando antes de pasar al algoritmo convencional, de forma que se constate que el resultado es el mismo. El algoritmo es totalmente «opaco» y se aprende de memoria, sin establecer conexión alguna con el concepto que lo origina.

Una secuencia semejante se puede realizar para la introducción de la división:

- 6 caramelos repartidos entre 3 niños, tocan a 2 cada uno.
- 6 repartido entre 3, es igual a 2.

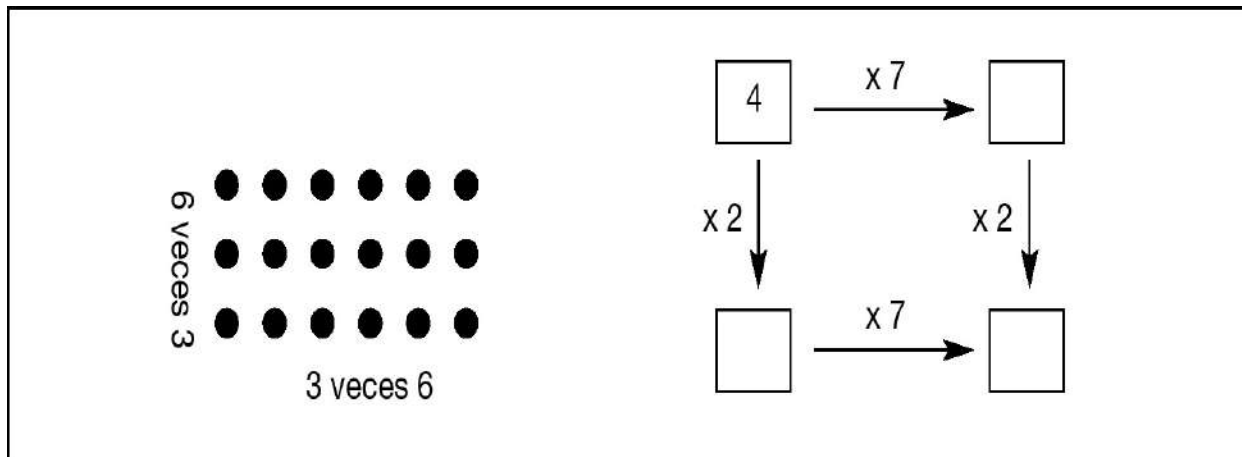
- $6 : 3 = 2$.

La enseñanza de los algoritmos estándares de multiplicación y división cuando se trata de números de varias cifras requiere una serie de pasos encadenados que el alumno ha de recorrer y memorizar para la realización correcta de los mismos. Para la división, se ha constatado que haciendo la recta explícita (ver capítulo dedicado a los algoritmos) se facilita el aprendizaje del algoritmo. Es conveniente que los alumnos trabajen y realicen operaciones con algoritmos no convencionales para conseguir un mayor sentido numérico.

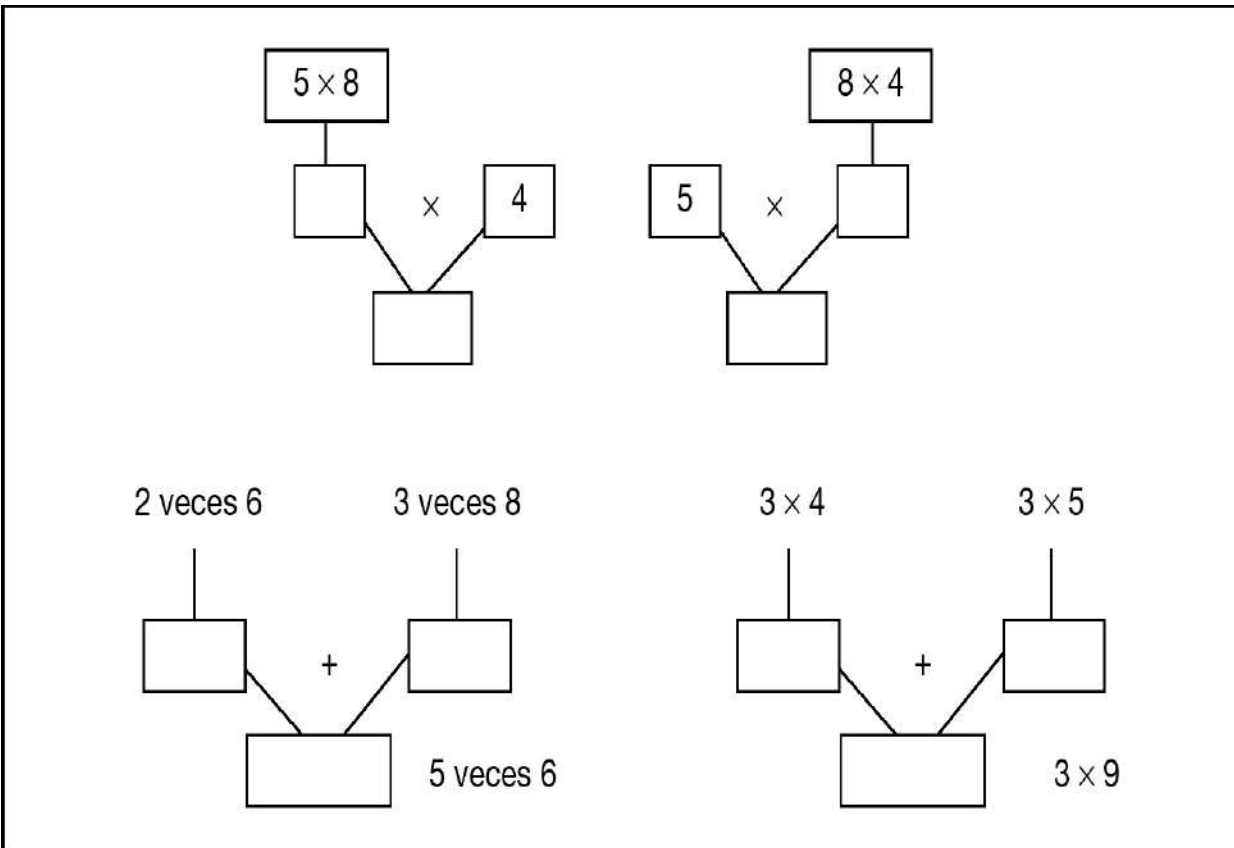
Calcular el dividendo de la división es conocido tradicionalmente como hacer la prueba de la misma. Esta acción es importante para la comprensión de la relación existente entre la multiplicación y la división.

6.9.1. Propiedades

Las propiedades de las operaciones que estamos estudiando deben de introducirse como «casos especiales» de dichas operaciones. Se puede introducir la propiedad conmutativa con representaciones del tipo:



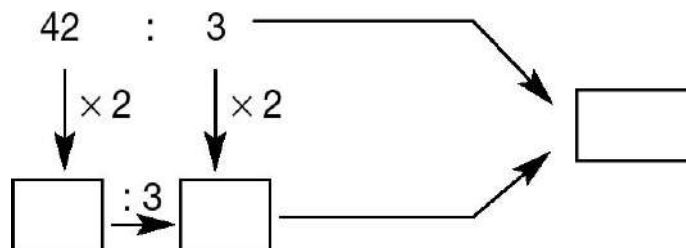
Más tarde se plantearán tareas similares para introducir las propiedades asociativa y la distributiva.



El esquema siguiente muestra una tarea que pretende que se comprenda la propiedad de la división que dice: *Si en una división se multiplica (o divide) el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no cambia y el resto queda multiplicado (o dividido) por dicho número.*

Actividad

Completa los siguientes esquemas y da una explicación de lo que ocurre.



6.10. ESTIMACIÓN Y CÁLCULO APROXIMADO

Una estimación numérica es hacer una conjetura en la que interviene el cálculo; en el caso que nos ocupa dicho cálculo será de multiplicar o de dividir. Se valora una cantidad o el resultado de una operación, se puede hacer por escrito, pero sobre todo se hace mentalmente. La valoración difícilmente será exacta, por lo que la estimación y el cálculo aproximado están muy relacionados. Aproximar a un número es dar un valor cercano al mismo. Las dos situaciones están ligadas al cálculo mental.

Una de las razones que se utilizan para justificar la introducción de la estimación en la enseñanza de la multiplicación y la división es que tiene utilidad práctica. En numerosas ocasiones de la vida diaria se utiliza la estimación en lugar del cálculo exacto, lo que aconseja que la escuela dedique tiempo al trabajo de situaciones en las que una respuesta aproximada, o una estimación, sea suficiente. La estimación permite, por otra parte, hacer una asignación rápida de un valor numérico en situaciones en las que se trabaja con números manteniendo un cierto control de la validez de la valoración. Por ejemplo: si se trata de realizar un viaje entre dos ciudades que distan 345 km, en un coche que consume 6 litros de combustible cada 100 km, una estimación en la que se incluya el gasto de combustible en el recorrido por las calles de dicha ciudad puede ser suficiente para adquirir el carburante necesario y que no falte. La otra razón, está relacionada con el desarrollo del sentido numérico, el hábito de hacer estimaciones permitirá conocer si un resultado es o no razonable. Una persona acostumbrada a estimar, que compra en la pescadería un kilo y medio de atún cuyo precio es 9,99 euros el kilo, y un cuarto de kilo de gambas arroceras cuyo precio es 5,4 euros el kilo y le piden por tal compra 27,50 euros, se percata rápidamente de que la cantidad que le están demandando no es razonable.

La introducción de la estimación en la enseñanza requiere tomar conciencia de que el trabajo con números y operaciones no tiene que ser exacto en todos los casos, sino solamente en aquellos que sea necesario y que las respuestas dadas a una pregunta de estimación no están bien o mal, sino que serán más o menos cercanas a la realidad.

6.11. PROBLEMAS DE MULTIPLICAR Y DIVIDIR

Los problemas aritméticos escolares más sencillos son los que implican una suma o una resta y dentro de éstos los que se resuelven juntando o separando objetos a una colección inicial. Los problemas que implican multiplicación o división constituyen la continuación de los anteriores y los más sencillos también se pueden resolver mediante agregación o separación, en este caso, de colecciones de objetos de igual número de elementos. Las situaciones de reunir cantidades iguales o partir una cantidad en otras iguales pueden resolverse contando, si los niños aún no saben calcular. Ejemplos de situaciones sencillas en las que aparecen problemas de estas características: *«Cada uno de los niños de una clase dispone de 2 cajas para guardar bloques, el maestro indica que se van a poner 3 bloques en cada caja; en todas y cada una de las cajas, 3 bloques. Los niños han de indicar cuántos bloques recibirán»*. Pueden resolver este problema de multiplicar «dos veces tres bloques» contando, uno, dos, tres; cuatro, cinco y seis. Los números utilizados en el problema pueden ser mayores si los niños son capaces de utilizarlos significativamente. En cuanto a la división: *«Supongamos que en la clase hay 16 alumnos, se les pide que se cuente para estar seguros del número que hay. Cada dos alumnos van a jugar con un balón. ¿Cuántos balones son necesarios?»*. Para resolver esta situación, se pueden agrupar a los niños por parejas y contar las parejas.

El campo puramente numérico es el inicio del campo del cálculo, y el paso de uno a otro ha de hacerse en el momento adecuado. En principio, el niño dominará el campo numérico y pasará paulatinamente al campo del cálculo. No tiene ningún interés contar para resolver un problema cuando se tiene la posibilidad de calcular y aplicar una operación para resolver dicho problema, y no es bueno que en un nivel en el que se supone que los niños deben de saber calcular, resuelvan un problema de multiplicar sumando. Si en lugar de realizar el cálculo con lápiz y papel se hace mentalmente, se conseguirá además que el alumno realice un trabajo de mayor nivel intelectual.

En un principio, para resolver los problemas de multiplicar y dividir planteados «fuera de contexto», el alumno puede reconstruir los datos con

colecciones de objetos, se puede considerar como una simulación de la situación descrita en el enunciado del problema. Si la solución se obtiene contando los objetos utilizados en la simulación hay que considerar que aparecen dos colecciones a contar de distinta naturaleza: una, en la que se cuentan las unidades de toda la colección (en las situaciones de multiplicación el recuento se realiza al final y en los de dividir contar toda la colección se hace al principio). Otra, en donde lo que se cuenta son colecciones, en la multiplicación la expresión «cada vez» representa una colección y en la división el número del divisor o del cociente (depende de la situación) indica número de colecciones. En estos dos procesos de contar hay diferencia ya que se produce un cambio de unidad, lo que puede crear dificultad en la comprensión de los alumnos. El profesor debe tener en cuenta que la unidad siempre es convencional, depende de la situación y del contexto de trabajo.

Las operaciones de multiplicación y división es conveniente introducirlas mediante el planteamiento de problemas sencillos que se puedan resolver contando, pasar posteriormente a problemas que exijan de la utilización de las operaciones, así mismo que los alumnos inventen problemas cuya solución se obtenga realizando una multiplicación o división dadas. Los momentos en los que los alumnos han de resolver o inventar problemas no serán sólo en los temas dedicados al estudio de los algoritmos, son necesarias tareas de este tipo en otros momentos y durante un período de tiempo conveniente para que los conceptos se consoliden. Hay que conseguir que los alumnos además de multiplicar y dividir con rapidez y pulcritud, utilizando lápiz y papel, sean capaces de asociar estas operaciones a todas las situaciones posibles que modelizan.

6.12. MODELIZACIÓN DE SITUACIONES REALES

Una corriente de opinión fuerte, considera a la matemática como una actividad de modelización de la realidad y supone que los conceptos matemáticos tienen su origen en situaciones y problemas reales. Dentro de esta corriente, la multiplicación y la división proporcionan una buena

herramienta para modelizar aspectos de la realidad por la gran variedad de situaciones, de la vida real, relacionadas con este cálculo. Pero, además de la operación necesaria para resolver el problema, se requiere tomar en consideración características propias de la situación modelizada. Presentamos algunos casos como ejemplo:

— Saber reconocer si la situación propuesta permite una solución aproximada o exacta. Si se ha de conocer lo que cobra un empleado por siete horas de trabajo valorada la hora en 13 euros, habrá que hacer un cálculo exacto ya que el trabajador no aceptará recibir menos dinero como consecuencia de haber hecho un cálculo aproximado, a la baja. Por lo general, para responder a la expresión ¿cuántos...? habrá que conocer la exactitud que requiera la respuesta. Otras situaciones no exigen de tanta exactitud, cuando una persona, con experiencia en la cocina, prepara una receta no tiene necesidad de pesar las cantidades y utilizarlas exactamente, puede tomar a «ojo» los ingredientes y elaborar el plato de forma satisfactoria.

— En situación de división entera, conocer qué ocurre tanto si se toma el cociente por defecto como si se toma por exceso. Al hacer un reparto de balones, si se quiere saber cuántos balones son necesarios para dar un balón para cada dos niños y hay 15 niños, hay que conocer que si se toma la división por defecto y se indica que son 7 balones, un niño se queda sin jugar; si la división se toma por exceso y se indica que son 8, también hay que tener en cuenta que un niño jugará solo al balón.

En este mismo sentido, se hará hincapié cuando se les proponga a los alumnos inventar situaciones que se modelicen mediante una división en la que se haya fijado otras donde se haga.

Inventar situaciones que se resuelvan mediante la división $363 : 5$. Una para la que sea válido el cociente 72, otra para la que sea válido el cociente 73 y otra cuya solución pueda ser «sobre 70».

— El simbolismo recrea una situación ideal que, a veces, no se corresponde con la realidad. Si se trata de modelizar la situación de conocer

la cantidad de kilómetros que recorre un ciclista en tres horas y que ha tardado tres minutos en el primer kilómetro, la respuesta no se podrá calcular dividiendo los 180 minutos de las tres horas entre 3 minutos que necesita para cada kilómetro, ya que esto no tiene en cuenta el cansancio del ciclista que le obligará a rebajar la velocidad. Si se hace la división habrá que indicar que es una solución aproximada, por debajo del tiempo real.

Los estudiantes han de experimentar con una variedad de situaciones en las que se vea la naturaleza de las relaciones entre la realidad y el cálculo que es necesario hacer y realizar una interpretación explícita apropiada del resultado de dicho cálculo.

6.13. DIFICULTADES

La multiplicación y la división son conceptos complejos incluso en el dominio restringido de los números enteros, esta complejidad está asociada al rango de situaciones que modela y a la estructura conceptual que comprende.

Cuando los niños tratan de inventar problemas reales, para los que el cálculo puede ser aproximado, presentan una habilidad limitada para generar problemas apropiados, excepto para casos muy simples.

La equivalencia de doble con dos veces y triple con tres veces, puede producir errores si no se trabaja desde el principio la doble expresión, se debe de señalar doble o dos veces, triple o tres veces hasta que los alumnos sean capaces de identificar las dos expresiones y usar una o la otra indistintamente.

Otra dificultad se asocia a una excesiva experiencia sólo con cantidades que proceden de contar y el paso brusco a cantidades que proceden de medir en cuyo caso hay que acompañar al número de la unidad de medida.

La comprensión de las situaciones asociadas a la división presenta mayor dificultad que las asociadas a la multiplicación, lo que exige al profesor estar atento para reforzar dicha comprensión y hacer posible el establecimiento de posteriores relaciones.

Con frecuencia, al hacer una división, los niños consideran que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, cuando dicha cantidad corresponde a una unidad del divisor. Así: «*Al repartir 72 caramelos entre 9 niños. ¿Cuántos recibe cada uno?*». El problema resuelto mediante la división $72 : 9 = 8$ suele proporcionar la creencia errónea de que son 8 caramelos para 9 niños y no 8 caramelos para cada niño. Por esta razón es conveniente que el profesor interactúe con los alumnos planteando interrogantes como los siguientes: ¿Cuántos caramelos corresponde a un niño? ¿Cuántos caramelos corresponden a dos niños? Y seguir así hasta la totalidad de los 9 niños, cosa que además contribuiría a dar sentido a la prueba.

6.14. EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN

La evaluación es un elemento imprescindible en el currículo de matemáticas, y no es homogénea para todos los diseños curriculares. Cada modelo de enseñanza lleva asociado un modelo de evaluación. El propósito fundamental de la evaluación en el modelo que estamos defendiendo es el de proporcionar al profesor evidencia de lo que los alumnos conocen y son capaces de hacer.

La evaluación ha sido considerada durante mucho tiempo sinónimo de prueba o examen y el resultado de la misma usado para la promoción de los estudiantes. Con el cambio en la consideración de la matemática que venimos comentando, la evaluación adquiere una nueva dimensión. Se tiende a que se le considere como el instrumento que permite conocer el funcionamiento de un grupo o de un individuo cuando trabaja en matemáticas, analizando su actuación en una variedad de contextos que incluyen conocimiento y disposición hacia las matemáticas.

La evaluación ha de alinearse con los métodos de trabajo desarrollados en clase y hay razones que aconsejan usar técnicas de evaluación alternativas. El uso de una variedad de métodos de evaluación proporciona

mayor riqueza de conocimiento al profesor sobre lo que los estudiantes piensan, y los conocimientos que han obtenido. Proponemos los siguientes:

- Examen o prueba, puede hacerse de forma oral o escrita.
- Desarrollar una práctica, en un taller de matemáticas, que recoja elementos de los conceptos de multiplicación y división. Por ejemplo, tomando folletos publicitarios, realizar una sesión de invención de problemas sobre el contenido de dichos folletos, los problemas deberán ser resueltos por sus inventores y por el resto de la clase. Este trabajo se puede realizar en grupo.
- Trabajos de investigación y de modelización que posteriormente se expondrán y discutirán en clase.
- Sesiones de resolución de problemas separadas de las sesiones dedicadas al estudio de los algoritmos.

En todas las ocasiones la observación y la interacción con el alumno se consideran una de las principales fuentes de información para el profesor. Si los estudiantes discuten ideas matemáticas en grupo, el profesor puede vigilar y escuchar formándose, de este modo, un juicio del grado de comprensión y dificultad que presenten los alumnos. Pero sea cual sea el método de evaluación, no debe de constituir un fin en sí mismo, ni tampoco debe de verse como la meta del aprendizaje. Es un medio de obtener información que sirva de base para la toma de decisiones. Los resultados de la evaluación se deben de emplear con fines de valoración, que permitan conocer los progresos y compararlos con las metas y los objetivos programados.

En la evaluación sobre los conocimientos de la multiplicación y la división hay que considerar aspectos relacionados con los conceptos, los procedimientos y las actitudes. Las capacidades para leer e interpretar un problema, para resolver un problema, para enunciar problemas, para reconocer y establecer relaciones, para formular y validar generalizaciones entrarían dentro de lo conceptual. El conocimiento de hechos específicos, de algoritmos, de terminología, la aptitud para operar tanto con lápiz y papel como mentalmente, entrarían en lo procedimental. El grado de atención y dedicación a las tareas propuestas, el interés para relacionar el conocimiento

de la estructura multiplicativa con situaciones reales, estarían dentro de lo actitudinal.

6.15. BIBLIOGRAFÍA

- Brisseaud, R. (1980). *El aprendizaje del cálculo*. Madrid: Visor.
- Calvin T. L., Duane W. De Temple (2002). *Mathematical Reasoning for Elementary Teachers*. Boston: Addison Wesley.
- Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una didáctica escolar*. Madrid. Síntesis.
- Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.
- Castro E., Castro E. (1997). «Estructura Multiplicativa». *Perspectiva Escolar*, 211, 27-36.
- Castro, E. (2001). «Multiplicación y división». En E. Castro (Ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis Educación.
- Greer, B. (1992). «Multiplication and division as models of situations». En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.
- Rico, L., Castro, E., Corpas, A., Fernández, A., González, J., López, F., Mesas, T., Sáenz, O., Valenzuela, J. (1982). *Matemáticas 3º de EGB*. Madrid: Anaya.
- Rico, L., Castro, E., Corpas, A., Fernández, A., González, J., López, F., Mesas, T., Sáenz, O., Valenzuela, J. (1982). *Guía del profesor de matemáticas de 3º de EGB*. Madrid: Anaya.
- Rico, L., Castro, E., Corpas, A., Fernández, A., González, J., López, F., Mesas, T., Sáenz, O., Valenzuela, J. (1982). *Matemáticas 4º de EGB*. Ed. Madrid: Anaya.

- Rico, L., Castro, E., Corpas, A., Fernández, A., González, J., López, F., Mesas, T., Sáenz, O., Valenzuela, J. (1982). *Guía del profesor de matemáticas de 4º de EGB*. Madrid: Anaya.
- Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J. M^a., Valenzuela, J., Valldaura, J. (1990). *Matemáticas de 3º de EGB*. Sevilla: Algaida.
- Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J. M^a., Valenzuela, J., Valldaura, J. (1990). *Guía Didáctica matemáticas de 3º de EGB*. Sevilla: Algaida.
- Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J. M^a., Valenzuela, J., Valldaura, J. (1990). *Matemáticas de 4º de EGB*. Sevilla: Algaida.
- Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J. M^a., Valenzuela, J., Valldaura, J. (1990). *Guía Didáctica Matemáticas 4º de EGB*. Sevilla: Algaida.
- Segovia, I., Castro, E., Rico, L., Castro, E. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

7

Aprendiendo fracciones

J. M. Serrano

7.1. INTRODUCCIÓN

Cuando un alumno se enfrenta con la tarea de adquirir el concepto de número racional o de número fraccionario, deberá emplear estrategias diferentes que cuando pretenda adquirir un algoritmo que le permita operar con números fraccionarios, ya que en cada una de las situaciones se encuentra implícito un conocimiento diferente. En efecto, a partir de la distinción entre *saber qué* y *saber cómo*, los psicólogos cognitivos consideran básica la diferencia entre conocimientos conceptual o declarativo y conocimiento procedimental.

7.1.1. Conocimiento declarativo o conceptual

El conocimiento declarativo hace referencia a lo que una cosa es, siendo relativamente estático y expresando la capacidad para conservar y reproducir la información. Se representa por medio de proposiciones (unidades básicas de información, ideas), siendo su activación consciente y relativamente

lenta. Este tipo de conocimiento se encuentra formado por una red de relaciones que se establecen entre diversas porciones de información contenidas en nuestra memoria, o entre una información nueva (la que queremos aprender) y otra previamente aprendida. En este último caso, la información nueva sólo llegará a formar parte de nuestro conocimiento cuando se halla enlazado con lo previamente aprendido. A este proceso se le ha denominado de muy diversas maneras, empleando términos como *comprensión*, *aprendizaje significativo* o *asimilación*.

En el dominio de las matemáticas se distinguen dos niveles de conocimiento declarativo, en función del tipo de relación establecida en las informaciones: el nivel primario y el nivel reflexivo.

El nivel primario abarca relaciones que no son más abstractas que las porciones de información sobre las que son construidas, o lo que es lo mismo, que están unidas a un contexto específico. Así, por ejemplo, si a un niño se le enseña lo que es una fracción o a realizar operaciones (sumas, restas, etc.) con fracciones, aplicará este conocimiento que acaba de aprender a las situaciones que impliquen fracciones, o sea, al contexto específico de las fracciones.

En el nivel reflexivo, las relaciones establecidas son más abstractas que la información sobre la que se basan, es decir, no se limitan a un contexto determinado. De esta forma surge una reorganización de los rasgos principales de fragmentos de información que son superficialmente diferentes. Así, por ejemplo, cuando un niño aprende la adición o la sustracción, estas operaciones las podrá aplicar a la suma o la resta de números naturales, extendiéndolas y generalizándolas más tarde a fracciones, números decimales, etc., siempre y cuando vaya sumando o restando unidades iguales u homogéneas.

7.1.2. Conocimiento procedimental

El conocimiento procedimental alude a cómo hacer una cosa, es dinámico y expresa la capacidad de operar y transformar la información. Cuando ha sido adquirido trabaja rápida, automática e inconscientemente, representándose por medio de producciones (pares condición-acción).

En matemáticas el conocimiento procedimental se puede dividir también en dos parcelas que suelen recibir, en la literatura al uso, la denominación de reconocimiento de patrones y secuencias de acción.

El reconocimiento de patrones se encuentra vinculado a lo que se denomina la «forma» de las matemáticas, que hace referencia al lenguaje formal o sistema de representación simbólica. Así, este apartado del conocimiento procedimental incluye, tanto los símbolos utilizados por este área de contenido, como el conocimiento de las reglas sintácticas que nos dicen cómo se deben escribir esos símbolos de manera correcta. En el caso de los contenidos que estamos trabajando, si se plantea el problema de quién come más pastel, un niño que toma 3 trozos de un pastel que está dividido en 5 partes u otro niño que ha tomado 2 partes de un pastel idéntico pero que se encontraba dividido en 3 partes. La representación simbólica de la primera fracción de pastel es $\frac{3}{5}$ y la segunda $\frac{2}{3}$. Ambas representaciones están formadas por dos pares de números escritos en una forma determinada, no siendo igual el par (3, 5) tres quintos ($\frac{3}{5}$) que el par (5, 3) cinco tercios ($\frac{5}{3}$), ya que la traducción más simple de las fracciones al lenguaje cotidiano sería que primero (arriba) se ponen las partes tomadas (numerador) y después (debajo) las partes en que se ha dividido el pastel. De acuerdo a esta «forma» se puede «traducir» el lenguaje matemático a lenguaje coloquial y, viceversa, efectuar la «versión» del lenguaje coloquial al lenguaje matemático. De igual manera, la comparación entre ambas fracciones nos conduciría a la expresión:

$$\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$$

donde el ángulo que enlaza las dos fracciones debe presentar el vértice a la izquierda ($<$ y se «traduce» *menor que*) para indicar que la primera fracción es menor que la segunda, porque si el vértice del ángulo estuviera a la derecha ($>$) indicaría que la primera de las fracciones es mayor que la segunda ($>$ se «traduce» *mayor que*).

La segunda parcela del conocimiento procedimental está formada por algoritmos o reglas, entendidos como los modos de hacer o las instrucciones a seguir (paso a paso) para llegar a resolver correctamente una tarea

(secuencias de acción). Por esta razón, la característica básica de cualquier procedimiento es el hecho de tener que ser ejecutado siguiendo una secuencia previamente determinada, es decir, que este tipo de conocimiento se encuentra organizado jerárquicamente, siendo la relación básica la de «después de», estableciéndose así la secuencia lineal necesaria para resolver una determinada tarea. Por ejemplo, si queremos sumar las dos fracciones anteriores podemos seguir la siguiente secuencia de acción (análisis de tarea):

Primero comprobar si ambas fracciones tienen el mismo denominador

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3}$$

después, y puesto que no lo tienen, se calculará el mínimo común múltiplo de los denominadores,

$$\text{m.c.m. de } 5 \text{ y } 3 = 15$$

después, se transformarán ambas fracciones en otras equivalentes cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo antes calculado

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15}$$

después, y una vez homogeneizado dimensionalmente ambas fracciones se procederá, generalizando el concepto de suma de números enteros a los números fraccionarios, a sumar los numeradores de ambas fracciones expresando la unidad común, es decir, el denominador común

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15}$$

Los procedimientos pueden ser definidos en términos de «sistemas de producción», es decir, como conjuntos ordenados de reglas (producciones), que partiendo del estado inicial (problema), nos permiten alcanzar una meta (respuesta). Para que esto se produzca es necesario que la información inicial sea reconocida, lo que pondrá en marcha el proceso requerido para llegar a la solución (par condición-acción).

7.1.3. Las relaciones entre conocimiento declarativo y procedimental

No se puede definir con precisión las fronteras entre el conocimiento conceptual y procedimental, porque no existe independencia entre ambos tipos de conocimiento, es más, las conexiones entre ellos son complejas, dinámicas, necesarias e inevitables. En efecto, centrándonos en el campo de las matemáticas y más específicamente en el dominio numérico, la propuesta de una secuencia didáctica que mantenga una estrecha relación entre ambos tipos de conocimiento parece favorecer en gran manera la ejecución y la comprensión de los estudiantes; por una parte hace que los procedimientos no se almacenen en la memoria de forma aislada, con lo que se olvidarían y deteriorarían fácilmente, posibilitando su integración a la red general de información a través de redes semánticas específicas, con significado y bien organizadas. Por otra parte, ha quedado suficientemente probado, a través de numerosas investigaciones (cf. Serrano y Denia, 1994; pp. 24-26), que esta expresión concepto-procedimental en la adquisición de los conocimientos matemáticos incrementa las representaciones de los problemas, llegando a ser más fáciles de resolver; dirige la selección y ejecución de los procedimientos adecuados y la eliminación de los inadecuados; permite controlar los resultados de los problemas, confiriéndole sentido a los mismos y favorece la transferencia a problemas de estructuras similares, con lo que se reduce el número de procedimientos que deben ser aprendidos.

Recíprocamente, esta comunión entre el conocimiento declarativo y el procedimental reporta una serie de ventajas para el conocimiento conceptual. Una de ellas es que cuando los símbolos están unidos a referentes significativos se pueden usar para pensar en aquellos conceptos a los que representan y, por tanto, se pueden considerar como ayudas cognitivas para organizar y operar en el conocimiento conceptual. En este sentido existe

abundante evidencia empírica para afirmar que el sistema de símbolos puede producir conocimiento conceptual y se ha comprobado que el sistema de símbolos es responsable del desarrollo de algunos conceptos numéricos clave como el de número natural (N) entero (Z), racional (Q), real (R) y complejo (C).

Otra ventaja para el conocimiento conceptual es que al resolver inicialmente un problema del que no se conoce un proceso rutinario (como suele ser el caso del aprendizaje inicial de operaciones con fracciones) se usan conceptos que suponen un mayor esfuerzo para solucionarlos correctamente, pero al resolver problemas parecidos, el conocimiento conceptual se transforma en conocimiento procedimental a través de grupos de rutinas, o lo que es lo mismo, a través de sistemas de producción compuestos de pares condición-acción. Esta mecanización de los procesos permite que el sistema cognitivo, cuya capacidad es limitada, se libere y pueda dedicarse a otra actividad, como aprender aspectos nuevos de los problemas o establecer relaciones de otros tipos y, por tanto, a ampliar el sistema conceptual. Por ejemplo, en el caso de la adición de fracciones que se ha propuesto con anterioridad, cuando el estudiante ha adquirido el concepto de equivalencia de fracciones y construye el denominador común a dos denominadores, observa que, en algunos casos, el común denominador es el producto de los denominadores. Tras resolver varios problemas que implican este tipo de situaciones llega a descubrir que cada numerador de la fracción transformada es el producto del numerador inicial por el otro denominador (o los otros, en el caso de más de dos fracciones). Este tipo de situaciones le facilitan el acceso a un tipo de conocimiento declarativo: el concepto de números primos entre sí, definido como aquéllos números que no tienen divisores comunes.

7.1.4. Los esquemas operatorios

Esta intrínseca relación entre ambos tipos de conocimiento es descrita por Piaget (1981) en la clasificación que efectúa de los distintos esquemas cognitivos. El esquema es una unidad funcional de conducta, es decir, un instrumento u órgano inmaterial de intercambios entre el sujeto y el medio.

Piaget distingue, dentro de la organización cognitiva del individuo, dos grandes sistemas complementarios que denomina *Sistema I* (que permite comprender) y *Sistema II* (que permite saber hacer).

El *Sistema I* está formado por *esquemas presentativos* que trabajan sobre las características permanentes y simultáneas de los objetos comparables (conceptos, hechos o principios), se pueden generalizar y abstraer con facilidad, conservándose aunque se incluyan en otros, por ejemplo los números enteros están contenidos o son un subconjunto de los racionales (Z C Q).

El *Sistema II* sirve para tener éxito en todos los dominios, desde las acciones más elementales, hasta la solución de los problemas más abstractos, y está constituido por un conjunto de esquemas que reciben el nombre de *esquemas procedimentales* y que son definidos como las acciones o consecuencias de acciones que constituyen un medio para alcanzar un objetivo. Este tipo de esquemas hace alusión a situaciones particulares y heterogéneas, lo que supone una dificultad a la hora de abstraerlos del contexto para el que han sido creados. Además, para llegar a alcanzar el objetivo previsto, dentro del esquema procedimental, se van dando una serie de pasos, que permiten la superación progresiva de los objetivos planteados, lo que conlleva a una conservación muy limitada, puesto que cuando se utilizan se van volviendo inoperantes, ya que los que les siguen los van englobando y superando, aunque, de alguna manera, se conserven al ir reorganizándose o reconstruyéndose. Esta reconstrucción progresiva es lo más característico del *Sistema II* y, en definitiva, de cualquier procedimiento, por cuanto éstos son siempre definidos como estados de transición.

Sin embargo, un tercer conjunto de esquemas resultan de especial relevancia para el conocimiento matemático. Son los *esquemas operatorios*. Estos esquemas son estructuras organizadas de conocimiento, tienen cualidades estáticas (su estructura) y cualidades dinámicas (nos hacen esperar cierta información), se usan conscientemente (al guiar la recuperación) y automáticamente (al reconocer una instancia de un concepto), por lo que constan de conocimiento declarativo y procedimental. Los esquemas operatorios son pues, una especie de síntesis de los esquemas presentativos (conocimiento declarativo) y de los esquemas procedimentales (conocimiento procedimental). La mayor parte de los esquemas que permiten adquirir el conocimiento matemático son esquemas operatorios. En

este sentido, y centrándonos en el tema que nos ocupa, es evidente que sería tan inoperante «comprender» qué es un número fraccionario y no poder operar con ellos («saber hacer»), como poder operar con unos entes que no se sabe qué son, qué significan y a qué parcela de la realidad representan.

7.2. EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES

De lo expuesto con anterioridad podemos extraer importantes conclusiones a la hora de determinar cómo aprenden los estudiantes el concepto de fracción, el simbolismo de los números fraccionarios y las operaciones con los entes numéricos de $\mathbb{Q}$.

Los estudiantes comienzan el aprendizaje de los números racionales con una rica reserva de conocimiento relacionado con los procedimientos y conceptos propios de este campo numérico. Inicialmente, este conocimiento informal está muy limitado (por ejemplo, el conocimiento informal de los estudiantes está totalmente desconectado de los símbolos y procedimientos formales asociados con los números fraccionarios, o el cambio de unidad). Sin embargo, una instrucción apropiada puede ampliar y generalizar el conocimiento informal de los estudiantes para que estas limitaciones sean reconducidas, y el conocimiento informal llegue a proporcionar una base para el desarrollo de una comprensión de esos símbolos y procedimientos formales.

Durante varios años, los investigadores se han interesado por las cuestiones relacionadas con la comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes y la naturaleza de su desarrollo. Aunque muchas de las complejidades de esta comprensión todavía se nos escapan, los investigadores están de acuerdo en que esta comprensión depende de las relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya existe. Las teorías recientes en lo que se refiere al desarrollo de la comprensión de los estudiantes han intentado caracterizar el modo en que los estudiantes forman relaciones entre el conocimiento nuevo y el previo, para centrarse en la forma en la que los estudiantes construyen el significado de (y para) los

símbolos matemáticos, a partir del conocimiento inicial que poseen. Este tipo de conocimiento, que ha sido trabajado bajo distintas denominaciones (conocimiento intuitivo, conocimiento situacional o conocimiento informal) debe ser la base para efectuar un aprendizaje significativo. La mayoría de estas teorías sugieren que los estudiantes construyen el significado para los símbolos matemáticos emparejando los símbolos formales con otras representaciones que son significativas para ellos, tales como situaciones específicas de la vida real o acciones de representaciones concretas.

7.2.1. Primeras ideas sobre el número racional

El conocimiento inicial se caracteriza, generalmente, por su carácter aplicado, y es el conocimiento circunstancial de la vida real que el estudiante construye individualmente en su cotidiana interacción con los objetos físicos y sociales (y sus representaciones) del mundo, que puede ser correcto o incorrecto y que puede trazarse por el estudiante como respuesta a problemas planteados en el contexto de situaciones de la vida real familiares para él. Además, este conocimiento es el resultado de las experiencias personales antes que de la instrucción formal. De hecho, un conjunto importante de las investigaciones sobre el tema sostiene firmemente la hipótesis de que los estudiantes pueden construir significado para los símbolos y procedimientos matemáticos implícitos en la aritmética de los números racionales, contrastando o emparejando las representaciones simbólicas con su conocimiento informal (Mack, 1993).

El campo de los números racionales se considera uno de los campos matemáticos más complejos que los estudiantes se encuentran durante sus años de escolaridad primaria, ya desde el segundo ciclo de este nivel educativo. El campo consta de varios subconceptos de los números racionales, tales como medida, cociente, razón, operador multiplicativo, proporción, etc., que están conectados por principios fundamentales tales como invarianza y covarianza. Kieren (1993) y Behr, Harel, Post y Lesh (1993) han demostrado que para que los estudiantes desarrollen una comprensión completa del número racional, deben construir el significado de los símbolos y procedimientos de este campo numérico de modo que se produzca una integración de los diversos subconceptos.

Ha quedado ampliamente probado que los niños y los adultos, a menudo, solucionan problemas de la vida real empleando estrategias que inventan a partir de interacciones con su medio. Las estrategias informales de niños y adultos se valen de la situación o contexto con sus apoyos concretos y visuales, antes que depender de las manipulaciones simbólicas. Además, estas estrategias informales son con frecuencia, creativas en esencia y permiten resolver problemas de manera lógica y relativamente libre de error. En este sentido, numerosos estudios documentan que los estudiantes pueden emplear con éxito sus estrategias informales para resolver una gran variedad de problemas en el campo de los números racionales.

Las estrategias informales de los estudiantes para resolver los problemas planteados en el seno de los números racionales están basadas, ante todo, en una concepción parte-todo. Por ejemplo, los estudiantes se refieren con frecuencia a una fracción tal como $\frac{3}{4}$ como «tres trozos de una pizza o tarta que se divide en cuatro trozos» o «tienes tres trozos de pizza y hay cuatro en total». Como consecuencia, las estrategias informales para los problemas con números fraccionarios implican partir unidades en partes y tratar cada parte, como una unidad independiente o un número entero. De este modo, las estrategias informales proceden a tratar los problemas en el campo de los racionales de la misma forma que hacían en el de los enteros. Esta conducta se extiende a todos los subconceptos implicados en el aprendizaje de los números racionales (fracciones, cocientes, razones y proporciones).

Aunque esta forma de tratar inicialmente las nuevas entidades numéricas pueden limitar (y de hecho limitan) la comprensión que el estudiante pueda tener del número racional, al tratar significativamente el material, estas estrategias de solución se tornan más flexibles y sofisticadas y empiezan a pensar en los números racionales como representando entidades únicas y diferenciadas de las tratadas hasta ese momento. En este sentido, se ha podido comprobar que cuando los estudiantes construyen su conocimiento informal de las fracciones, las estrategias para resolver este tipo de problemas van, desde tratar las fracciones como problemas dividiendo el número entero, hasta una forma de dividir que tiene en cuenta el tamaño de las fracciones individuales. Por tanto, a pesar de la naturaleza limitada de las estrategias informales para la solución de problemas con números racionales, estas estrategias posibilitan la comprensión inicial de entidades nuevas, la resolución de problemas sencillos con números fraccionarios y el

desplazamiento cognitivo hacia una comprensión más completa del número racional.

Sin embargo, cuando los estudiantes pasan de las tareas con números enteros a los problemas con números racionales, es necesario que se produzcan cambios en su pensamiento, fundamentalmente, con relación a la naturaleza de los números con los que están trabajando y con su conceptualización de la unidad. En efecto, sobre todo en el segundo ciclo de Educación Primaria, cuando los estudiantes se encuentran con los números fraccionarios se deben enfrentar con cambios adicionales en la naturaleza de la unidad. Dos de los principales cambios que ocurren caracterizan las diversas interpretaciones de los números racionales. Cuando los estudiantes conceptualizan los números racionales como la interpretación parte-todo de las fracciones, la unidad cambia desde cantidades discretas que pueden contarse a cantidades continuas que pueden medirse o dividirse y se pueden representar con un único número de la forma a/b , con $b \neq 0$. Pero cuando esos mismos estudiantes se encuentran con el cociente, la razón numérica y las interpretaciones de los operadores multiplicativos del número racional, la unidad cambia para implicar una comparación de las unidades, con el numerador representando una unidad y el denominador representando otra unidad diferente; de este modo, crean un nuevo tipo de unidad fuera de la comparación de las dos unidades originales. Esta es la razón por la que un numeroso grupo de investigadores han propuesto que para que los estudiantes alcancen una comprensión completa del número racional, sus concepciones iniciales deben ser generales y flexibles para que puedan dar cuenta del cambio de la naturaleza de la unidad. Sin embargo, los estudios recientes sobre el conocimiento informal de los estudiantes con respecto a estos entes numéricos sugieren más bien que, al menos inicialmente, la concepción informal de los estudiantes no se refleja como una concepción general y flexible y que, con frecuencia, tienen dificultad para identificar las unidades apropiadas. En estos casos, los alumnos suelen cambiar arbitrariamente de unidad, para que ésta incluya todos los elementos identificados en el problema o en los dibujos o materiales que representan el problema.

La concepción parte-todo del número racional puede considerarse, en un principio, como constreñidora de la comprensión de los racionales porque no reconceptualiza la unidad. Sin embargo, los datos de que se dispone en la

actualidad, también sugieren que una consecuencia de construir el conocimiento informal es que la concepción parte-todo comienza a expandirse para permitir a los estudiantes tener éxito tratando las características críticas de la unidad ante una variedad de situaciones problema.

Existen variaciones con respecto a la habilidad de los estudiantes para reconceptualizar la unidad cuando reconstruyen su conocimiento informal. Muchos estudiantes son capaces de considerar un todo como una unidad que es inalterable en tamaño y otros son capaces de considerar un todo como una unidad que está formada por una colección de unidades donde son posibles varios grupos de unidades. Estos últimos estudiantes son capaces de determinar la unidad apropiada en situaciones que implican múltiples unidades, tales como $\frac{2}{3}$ de seis galletas al referirse a todas las galletas como una gran-galleta y luego dividen el todo en tres partes iguales. De este modo, y a pesar de las limitaciones iniciales de la concepción informal del número racional, los estudiantes pueden dar sentido a los ejemplos reales en contextos apropiados, y estas experiencias proporcionan una base para el desarrollo de un concepto flexible de unidad.

7.2.2. Del conocimiento informal al conocimiento formal

Muchos investigadores han aportado datos que indican que cuando los problemas se presentan verbalmente, en el contexto de situaciones de la vida real que no requieren manipular símbolos, los estudiantes resuelven los problemas aplicando su conocimiento informal, cosa que no ocurre cuando los problemas se presentan con una representación simbólica (por ejemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$). El fracaso de los estudiantes para conectar el conocimiento informal y el conocimiento formal de los símbolos, procedimientos y representaciones pictóricas y concretas se manifiesta también, y en mucha mayor medida, para la aritmética del número entero. En este sentido es especialmente conocido el trabajo de Leinhardt (1988), que evaluó, en estudiantes de cuarto curso, su conocimiento sobre el concepto de fracción de dos formas: (a) pidiendo a los estudiantes que respondieran preguntas sobre fracciones que estaban representadas pictórica y simbólicamente y (b) pidiendo que respondieran preguntas sobre fracciones que estaban fijadas en una historia de la vida real que les leía. Los ítems escritos y las preguntas

reunían las mismas seis áreas: parte-todo, fracción de un número entero, equivalencia, etiquetar o leer, orden y transformación de números mixtos a fracciones. Las respuestas de los estudiantes a las cuestiones de la historia fueron, con mucha frecuencia, correctas, lo que sugiere que poseían una sólida comprensión para los conceptos tales como parte-todo, encontrar una fracción de un entero, ordenar y etiquetar fracciones e identificar fracciones equivalentes. No obstante, su ejecución en los problemas presentados pictórica y simbólicamente fue bastante débil. Leinhardt concluyó que el conocimiento informal que tenían los estudiantes de las fracciones sólo estaba disponible cuando las preguntas se formulaban de un modo que no parecía matemático. Otras experiencias similares a la de Leinhardt vienen a demostrar que el conocimiento informal del concepto y los subconceptos de número racional, en un principio, no está conectado a su conocimiento formal de los símbolos y procedimientos. Una técnica de evaluación consiste en presentar a los estudiantes un problema de fracción en el contexto de una situación de la vida real y, a continuación, presentar un problema similar representado simbólicamente. En el primer caso, por ejemplo, se le plantea:

«Supongamos que tienes dos pizzas del mismo tamaño y cortas una de ellas en 6 partes iguales y cortas la otra en 8 partes. Si tienes un trozo de cada pizza, ¿de cuál tendrás más?».

En el segundo caso se plantea:

«Dime qué fracción es más grande $1/6$ o $1/8$ ».

Se podría contrabalancear las preguntas y plantear primero el problema simbólico. Es fácil comprobar que nuestros alumnos de sexto de Primaria tienen éxito al resolver problemas presentados en el contexto de la vida real y, consistentemente explican sus respuestas en términos de su conocimiento informal de las fracciones. Sin embargo, estos mismos estudiantes no son capaces de resolver muchos problemas presentados de forma simbólica y, a menudo, explican sus soluciones en términos de un conocimiento imperfecto relacionado con los símbolos formales y procedimientos algorítmicos, en lo que Piaget denominaría «falsas acomodaciones». Por ejemplo, en el problema de la pizza casi todos los estudiantes dicen que tendrían más de la pizza dividida en 6 partes, porque «la que está cortada en 6 partes tiene menos partes y por tanto, hay más en cada trozo». Sin embargo, en respuesta al problema presentado simbólicamente, la mayor parte de los estudiantes

dicen que $\frac{1}{8}$ es más grande porque «8 es un número más grande; 8 es más grande que 6».

Parece, por tanto, que el conocimiento informal de los conceptos implicados en el número racional no está vinculado a su conocimiento de los símbolos y procedimientos formales de esos mismos entes. Esta discontinuidad inicial entre los dos tipos de conocimiento, limita la propia comprensión del número racional porque deja que el alumno pueda obtener diferentes respuestas a problemas similares planteados en diferentes contextos y resolver las inconsistencias entre sus respuestas diciendo algo así como: «bien, en este estamos hablando sobre galletas y en este otro sobre números». Sin embargo, Mack (1993) ha demostrado que con una instrucción apropiada, los estudiantes pueden conectar su conocimiento de los símbolos y procedimientos formales para los números racionales con su conocimiento informal.

No se puede precisar con exactitud cómo debería proceder la instrucción para ayudar a los estudiantes a construir y extender su conocimiento informal sobre los números racionales, sin embargo, una de las acciones importantes parece ser el emparejamiento de representaciones simbólicas con los problemas presentados en el contexto de situaciones familiares que se explicaron desde el conocimiento informal. Esto puede requerir ir hacia atrás y hacia delante entre problemas presentados simbólicamente y problemas presentados en situaciones familiares. Y también puede requerir un ajuste frecuente entre ambos tipos de problemas para hacer que la conexión entre representaciones simbólicas y conocimiento informal sea lo más clara y evidente posible.

Cuando se procede de esta manera, los estudiantes empiezan vinculando los procedimientos y los símbolos de las fracciones con su conocimiento informal. En ocasiones, los estudiantes necesitan que nos movamos entre problemas presentados en varios contextos varias veces antes de que reconozcan las conexiones, mientras que, en otras ocasiones, las conexiones se reconocieron rápidamente. Después de un período relativamente corto de una instrucción de este tipo, los estudiantes empiezan a sacar su conocimiento informal por iniciativa propia para resolver problemas más complejos, pero estrechamente relacionados. En este sentido se puede afirmar que resolver problemas en diferentes contextos parece ayudar a reconocer la conexión entre la representación simbólica y el conocimiento

informal que se posee, lo que permite construir un algoritmo significativo para el problema de la vida real y luego extender el algoritmo para resolver el problema simbólico.

Así, parece que una buena combinación entre problemas representados simbólicamente y problemas presentados en contextos familiares, ayuda a los estudiantes a conectar el conocimiento informal para los números racionales con sus procedimientos y símbolos correspondientes. Varios investigadores coinciden en señalar que este emparejamiento de representaciones simbólicas a contextos familiares también caracteriza la forma en la que los estudiantes pueden construir su conocimiento informal en otras áreas de contenido. También deberíamos tener en cuenta dos factores importantes, el contexto problema y el conocimiento de los procedimientos que los estudiantes memorizan, cuando el proceso instruccional ayuda a los estudiantes a emparejar la representación simbólica a su conocimiento informal.

7.2.3. Influencia del contexto

La habilidad de los estudiantes para construir su conocimiento informal de los números racionales parece estar influida por el contexto en el que se presentan los problemas. Con frecuencia, los estudiantes resuelven problemas relacionándolos con otros específicos, tales como tartas de chocolate, antes que traducir el contexto a representaciones simbólicas. Por ejemplo, cuando se pide a los estudiantes «repartir 8 tartas de chocolate entre 5 personas», los estudiantes utilizan estrategias de división informales para alcanzar la solución del problema, porque, para ellos, la actividad de división es una parte integral de la solución.

Otra notable influencia del contexto es que proporciona ayuda a los estudiantes a la hora de determinar la unidad apropiada en un problema. Con frecuencia, los estudiantes tienen dificultades al determinar la unidad apropiada cuando un problema se presenta de forma simbólica o con representaciones pictóricas o concretas, pero a menudo, tienen éxito al identificar la unidad apropiada cuando el problema se plantea en el contexto de una situación familiar.

Por tanto, el contexto parece influir, de manera positiva, en el pensamiento de los estudiantes. Sin embargo, hay una cuestión que necesita tenerse en cuenta: ¿qué hace o qué elementos comporta un problema realista para que los estudiantes tengan éxito al extraer su conocimiento informal para representar y solucionar el problema?

Muchas de las preguntas utilizadas en los estudios sobre el conocimiento informal incluyen situaciones como las de repartir 3 galletas entre 5 personas, comer $7/8$ de una galleta, etc. Las situaciones como estas son inventadas y no representan problemas reales que los estudiantes tengan algún interés en resolverlos; sin embargo, los estudiantes fueron capaces de resolver tales problemas explicándolos desde su conocimiento informal. Es posible que estos problemas no sean lo suficientemente reales para animarles a construir su conocimiento informal. Es posible que los problemas no necesiten ser realistas, sino simplemente que necesiten proporcionar un contexto que tenga sentido para los alumnos.

Mack (1993) cuenta la siguiente anécdota: «En los estudios con alumnos de tercero, cuarto y sexto, dejé que eligieran el contexto para sus problemas al principio de cada sesión de enseñanza (situaciones de la vida o representaciones simbólicas). Los estudiantes eligieron situaciones cotidianas tales como pastel de chocolate con escarchado de fresa, pizza pepperoni, tarta de limón, galletas de azúcar y cucharones de helado de fresa. Para esta última situación, tengo que reconocer que tuve cierta dificultad para conceptualizar $3/5$ de un cucharón de helado de fresa, pero cuando le sugerí al alumno que eligió el helado, que trabajáramos con pizzas u otra cosa que me resultara más fácil representarlo en mi mente, me respondió inmediatamente “No me gusta la pizza y nunca la como. Sin embargo, me encanta el helado y tomo cada día, si puedo hacer los problemas con helado, me resultarán más fáciles”. Después de esto, presenté a ese estudiante problemas en los que el contexto incluía cucharones de helado de fresa y, aunque yo continuaba teniendo dificultad para conceptuar estas situaciones, el alumno en cuestión daba rápidamente significado a las representaciones simbólicas tales como $4 \frac{3}{8} - 1 \frac{5}{8}$, emparejándolas o comparándolas con problemas presentados en el contexto de cucharones de helado».

Además, para que lleguen a tener sentido para los estudiantes, otra característica importante de los problemas cotidianos es que el contexto hace

explícitas características críticas del problema, tales como cuál es la unidad. Si el contexto falla en hacer explícitas estas características, los estudiantes, a menudo, fracasan al resolver el problema. De este modo, los problemas de la vida cotidiana que ayudan a los estudiantes a construir su conocimiento informal, son problemas que tienen sentido para ellos. Estos problemas hacen que las características importantes del problema sean explícitas y permiten a los estudiantes pensar en términos de cantidades representadas en el problema antes de exigirles que razonen con representaciones simbólicas. Como la instrucción ayuda a los estudiantes a emparejar las representaciones simbólicas con su conocimiento informal, se debería tratar de determinar qué contextos-problema son significativos para los estudiantes y qué características de los problemas ayudan a extender su conocimiento informal.

7.2.4. Influencias del conocimiento declarativo y procedimental en la comprensión del número racional

Varios estudios sostienen que una de las principales consecuencias de memorizar los procedimientos para las operaciones con números racionales, antes de intentar construir su conocimiento informal, es que el conocimiento de los procedimientos memorizados que, muchas veces, son imperfectos, tienden a dominar su pensamiento incluso cuando se trata de conceptos que subyacen a los propios procedimientos.

Aunque la interferencia de los procedimientos aprendidos de memoria es fuerte, puede superarse yendo hacia atrás y hacia delante entre los problemas presentados simbólicamente y aquellos que se trazan desde el conocimiento informal. También puede ser útil no utilizar las representaciones simbólicas durante un período de tiempo para animar a los estudiantes a desarrollar procedimientos basados en el conocimiento informal. Aunque existen una amplia variedad de caminos para superar la interferencia de los procedimientos aprendidos de memoria, los estudiantes normalmente no logran superar la interferencia de este conocimiento por sí mismos y, por tanto, se requiere un esfuerzo por parte del instructor.

Durante unos años, los investigadores han trabajado en el desarrollo de la comprensión del concepto de número racional y estas investigaciones han

proporcionado descripciones de etapas identificables en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes, al mismo tiempo que han servido como base para recientes teorías sobre cómo los estudiantes construyen el significado para los símbolos y procedimientos formales asociados con los números racionales.

En este sentido, se han construido análisis conceptuales del campo de los números racionales para identificar elementos que son esenciales para el desarrollo de la comprensión de los estudiantes y sugieren posibles secuencias en las que el desarrollo puede avanzar. Aunque estos análisis conceptuales todavía no están acabados, hay un consenso acerca de que una completa comprensión del número racional depende de desarrollar primero una amplia concepción de estos entes numéricos, es decir, las investigaciones se mueven desde el conocimiento declarativo hacia el procedimental. No obstante, es posible construir significados para los símbolos y procedimientos formales basándose en una concepción del número racional que, inicialmente, esté limitada en perspectiva. Por lo tanto, no es necesario que la instrucción inicial se centre en desarrollar una amplia comprensión del número racional. Una alternativa viable parece ser la de desarrollar una parte del número racional basada en la división y luego extender esta concepción a otras partes, una vez que los estudiantes pueden relacionar los símbolos y procedimientos matemáticos a su conocimiento informal y pueden reflexionar sobre estas relaciones. Hay datos que sugieren que esto es una alternativa efectiva para desarrollar la comprensión de las fracciones porque restablece las limitaciones iniciales del conocimiento informal de los estudiantes. No está claro todavía cómo la comprensión de los estudiantes de otras partes del número racional puede desarrollarse a través de la división o cómo los estudiantes pueden desplazarse desde una parte del número racional hacia otras a través de su conocimiento informal. Sin embargo, al añadir algo a lo que los estudiantes ya saben, sus concepciones informales pueden extenderse de forma significativa.

Aunque en este punto la evidencia es todavía provisional, el potencial del conocimiento informal de los estudiantes en el desarrollo de la comprensión de los números racionales no debería descartarse.

En la actualidad, una de las cuestiones más importantes que se nos presentan cuando buscamos formarnos una idea acerca de las distintas maneras en que los estudiantes pueden construir significados para los

conceptos y procedimientos implicados en los números racionales, es si los estudiantes pueden desarrollar una amplia comprensión del número racional construyéndolo desde su concepción informal de la división.

7.2.5. La interconexión entre significado y función del aprendizaje de los números racionales

Para poder llegar a una verdadera comprensión del número racional es, pues, fundamental el iniciar su aprendizaje desde sus conceptos más básicos mediante interconexiones permanentes entre el conocimiento declarativo y el procedimental, dada la naturaleza operatoria de los esquemas implicados en su adquisición.

Las leyes orgánicas que sustentan la educación en los países desarrollados se muestran bastante claras a este respecto, remarcando que uno de los principios básicos de la instrucción es el de facilitar la adquisición de aprendizajes significativos y funcionales, así como su interconexión. Es decir, por un lado, hacen hincapié en diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que permitan el establecimiento de relaciones sustantivas entre los conocimientos, experiencias e ideas previas de los alumnos y los nuevos aprendizajes (*significabilidad del aprendizaje*); por otro lado, se especifica la necesidad de proporcionar oportunidades al alumno para poner en práctica los conocimientos asimilados, de modo que pueda comprobar la utilidad y el interés de lo adquirido, consolidando aprendizajes no ligados estrictamente al contexto en que se produjeron, propiciando una reflexión personal de lo realizado y permitiendo una autoelaboración de conclusiones (con respecto a lo que se ha aprendido) que posibilite el análisis de las mejoras que, sobre sus ideas previas, se han producido a lo largo de todo el proceso (*interconexión entre significado y función de los aprendizajes*); y, finalmente, es necesario prever experiencias y actividades a través de las cuales sea necesario hacer uso de los conocimientos, consolidarlos y reestructurarlos, llevando de esta manera la *funcionalidad del aprendizaje* más allá de la simple aplicación práctica del conocimiento adquirido y posibilitando que el concepto de *utilidad material* (funcionalidad directa o explícita) se extienda también al concepto de *utilidad funcional* (funcionalidad indirecta o implícita), esto es, al convencimiento de que un aprendizaje puede ser útil y necesario para llevar a cabo otros aprendizajes y

para enfrentarse con éxito a la adquisición de otros contenidos (utilidad funcional específica), como a la utilidad que el aprendizaje puede presentar para potenciar el desarrollo de habilidades y estrategias de planificación y regulación de la propia actividad de aprendizaje (utilidad funcional generalizada).

En este sentido, la actividad de aprendizaje con números racionales parece tener unos componentes muy claros por encontrarse suficientemente probados a través de numerosas investigaciones.

En primer lugar, las situaciones-problema a las que se enfrenten los estudiantes deben estar contextualizadas y ajustadas, en un primer momento, a la vida real y posibilitar la aplicación de relaciones todo-parte.

En segundo lugar, el aprendizaje debe sustentarse sobre materiales manipulativos. En este sentido cabe destacar que se han establecido multitud de comparaciones en las que se han comparado los resultados obtenidos con métodos con materiales manipulativos, uso de diagramas y sólo simbolismo y las diferencias, del primero de los métodos con referencia a los otros dos presentan un alto grado de significación (Behr, Wachsmuth y Post, 1998; Robold, 2001; Sherman, 1991).

En tercer lugar, se hace necesaria una conexión de las estrategias numéricas en la solución de problemas, con otros tipos de estrategias, como, por ejemplo, estrategias visuales (Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen y Shew, 1998).

En cuarto lugar, se debe potenciar una visión integral de los conceptos de fracción, partición, razón y proporción (Pitkethly y Hunting, 1995).

En quinto lugar, los distintos modos de acceso al planteamiento de los problemas deben ir integrándose paulatinamente de manera que la representación pictórica, manipulativa, verbal, aplicada al mundo real o simbólica constituyan variaciones posibles de un mismo problema o situación-problema (Cramer, Post y del Mas, 2002).

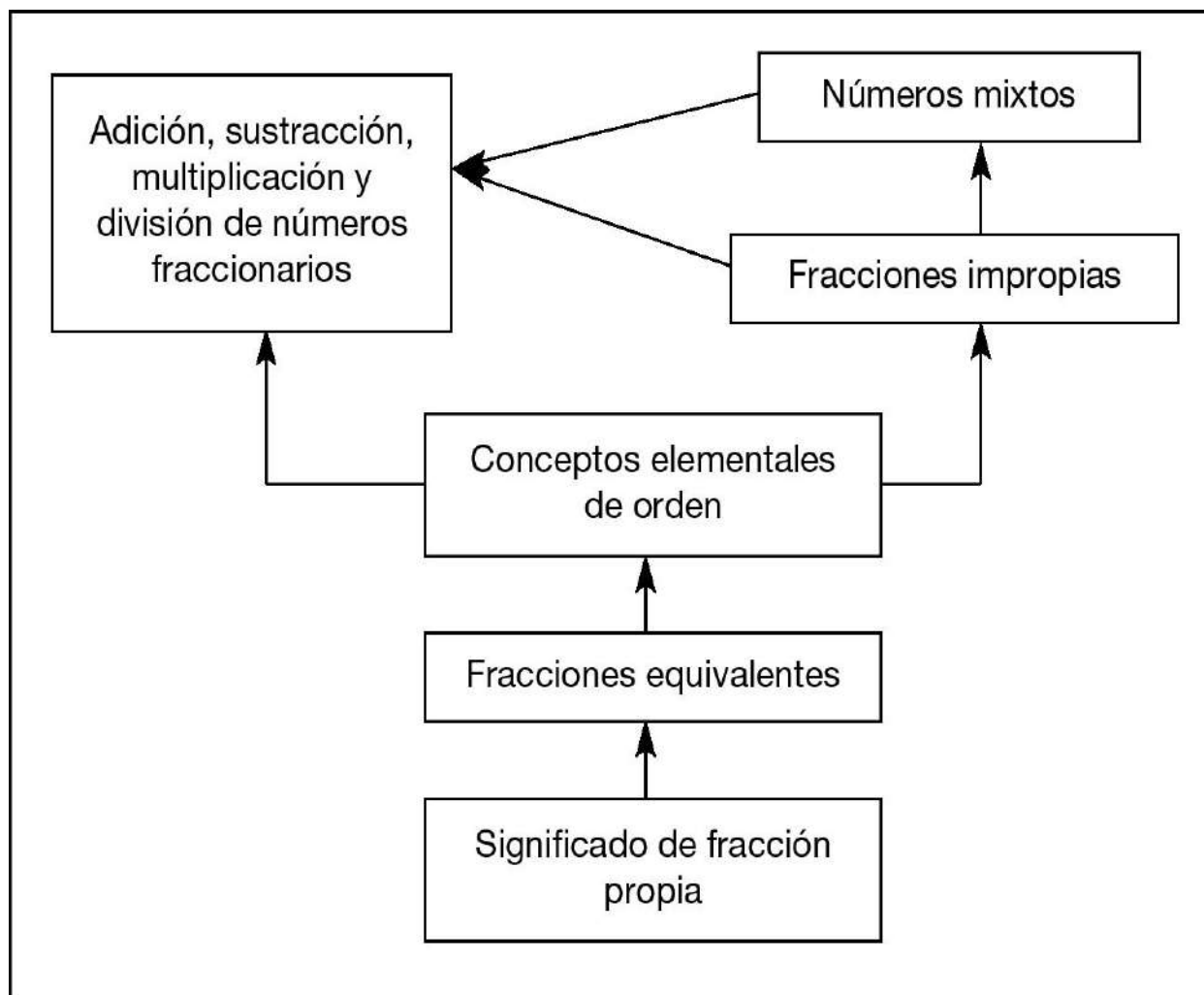
En sexto lugar, el alumno en su aprendizaje generaliza y transfiere lo aprendido sobre conceptos previos a conceptos nuevos, por tanto la actividad de aprendizaje de los números racionales partirá de conceptos y procedimientos aprendidos en campos numéricos anteriores, en este caso el de los enteros. Es decir, que si un alumno aprendió que en el campo de los

enteros multiplicar supone la consideración simultánea de dos dimensiones de la realidad, y la forma de representar esta idea es la de utilizar una matriz rectangular, por ejemplo:

para representar 3×4 , donde 3 son las unidades lineales de la dimensión anchura y 4 son las unidades lineales de la dimensión longitud, la «conjunción» o «consideración simultánea» de ambas dimensiones permite obtener una superficie de 12 unidades, evidentemente no lineales, sino cuadradas; esta misma representación procedimental se encuentra a disposición del sujeto para representar, por ejemplo, $(2/3) \times (3/4)$, con la evidente introducción del cambio de unidad. Ahora la longitud es una unidad dividida en cuatro partes y la anchura es una unidad dividida en tres partes, de modo que considerando simultáneamente dos partes de las tres en las que se encuentra dividida la anchura del rectángulo y tres de las cuatro en las que se encuentra dividida la longitud, tendremos 6 partes de las 12 en las que se encuentra dividida la superficie total, es decir, $6/12$ o la mitad de las unidades totales ($1/2$).

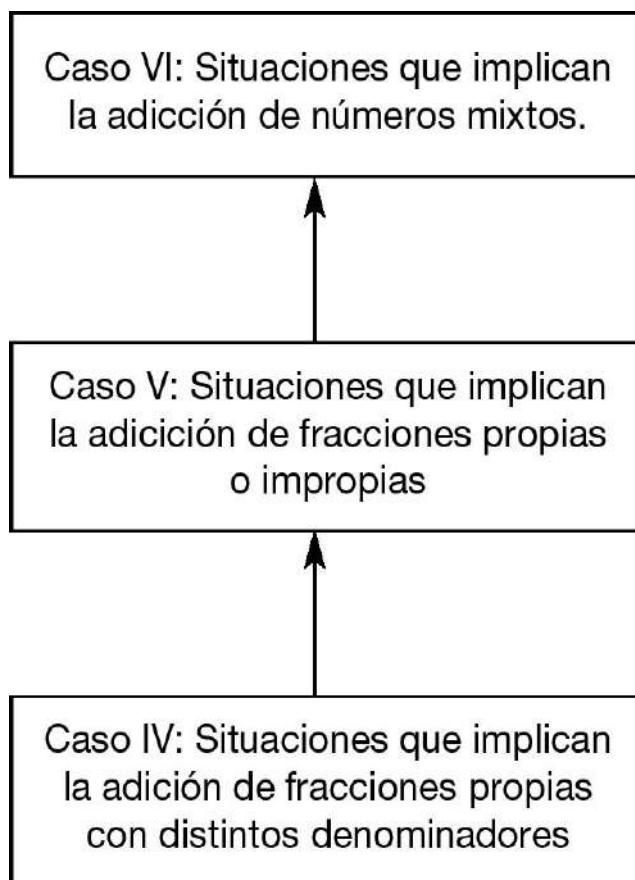
Finalmente y en conexión con lo anterior, es necesaria la organización logocéntrica del contenido propio de este campo numérico, para situar la tarea de aprendizaje, utilizando una expresión vygotskiana, en la *zona de desarrollo próximo*, de manera que la adquisición del conocimiento proceda siempre de las ideas previas del alumno y camine hacia el menor de los mejores niveles de desarrollo posible, es decir, y utilizando ahora una expresión piagetiana, el proceso de aprendizaje debe ser un proceso de *equilibración mayorante*.

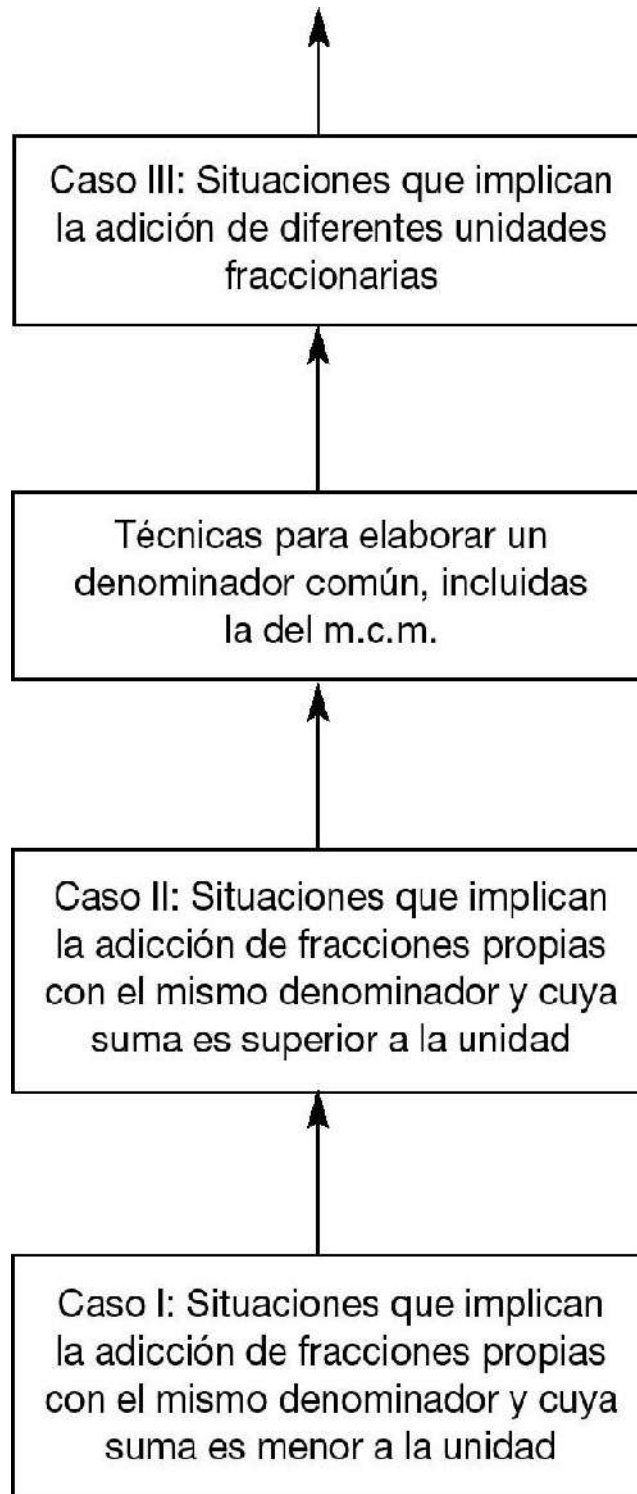
En este sentido, podríamos establecer un diagrama de flujo, previo al planteamiento de los análisis de tareas pertinentes, para el aprendizaje de los números fraccionarios; diagrama que puede ser un elemento efectivo para esta organización logocéntrica del contenido. Un ejemplo de diagrama de flujo, de entre otros igualmente posibles, podría ser el siguiente:



El vértice superior izquierdo podría ser analizado a su vez, desde la perspectiva de cada una de las operaciones que en él se proponen, a través de nuevos diagramas.

El diagrama correspondiente a la operación de adición, podría plantearse en los siguientes términos:





7.3. BIBLIOGRAFÍA

- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). «Rational numbers: Toward a semantic analysis emphasis on the operator construct». En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, N.J.: LEA; pp. 13-48.
- Behr, M. J., Wachsmuth, I. y Post, T. (1998). «Rational number learning aids: transfer for continuous models to discrete models». *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(1); 64-82.
- Cramer, K. A., Post, T. R. y del Mas, R. C. (2002). «Initial fraction learning by fourth and fifth grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the Rational Number Project Curriculum». *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2); 111-144.
- Kieren, T. E. (1993). «Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding». En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, N.J.: LEA; pp. 49-83.
- Leinhardt, G. (1988). «Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence». *Educational Psychologist*, 23(2); 119-144.
- Mack, N. K. (1993). «Learning Rational numbers with understanding: The case of informal knowledge». En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, N.J.: LEA; pp. 85-106.
- Middleton, J. A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Shew, J. A. (1998). «Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number». *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4); 302-312.
- Piaget, J. (1981). «Lo posible, lo imposible y lo necesario». *Infancia y Aprendizaje, Monografía 2*; 108-121.
- Pitkethly, A. y Hunting, R. (1995). «A review of recent research in the area of initial fraction concepts». *Educational Studies in Mathematics*, 30(1); 5-38.

- Robold, A. I. (2001). «Teaching fraction and rational number concepts with an area model manipulative». *Ohio Journal of School Mathematics*, 44: 36-38.
- Serrano, J. M. y Denia, A. M. (1994). *¿Cómo cuentan los niños? Un análisis de las teorías más relevantes sobre la construcción de los esquemas de conteo*. Murcia: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Murcia.
- Sherman, H. W. (1991). «A comparison of three methods of teaching rational number concept to preservice teachers». *Educational Research Quarterly*, 14(4); 48-55.

8

Enseñando fracciones

Andrés Nortes Checa

8.1. INTRODUCCIÓN

8.1.1. Las fracciones en la historia de las matemáticas

En uno de los documentos más antiguos que se conoce en la historia de las matemáticas, el papiro de Ahmes con cerca de 4.000 años de antigüedad —también conocido como el papiro de Rhind— ya se menciona el uso de las fracciones. En este papiro aparecen una serie de tablas y de problemas resueltos que incluyen la utilización de fracciones. Así, el problema 25 del papiro dice: «Una cantidad y la mitad de esa cantidad es igual a 16» y en el problema 24 se enuncia: «Calcular el valor del montón si el montón y un séptimo del montón es igual a 19». También se menciona la costumbre que tenían los egipcios de expresar toda fracción como suma de fracciones de numerador uno, apareciendo escrita la fracción $\frac{3}{4}$ como $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, de tal forma que como sólo sabían sumar fracciones de numerador uno, tenían que reducir toda fracción a suma de fracciones de numerador uno.

Los chinos asignaban un rol femenino y un rol masculino a los elementos de la fracción, refiriéndose al numerador como el hijo y al denominador como la madre.

Los babilonios también aportaron sus conocimientos a las fracciones, y así se han ido utilizando hasta nuestros días.

8.1.2. Las fracciones en el currículo

Debido a que actualmente todas las Comunidades Autónomas tienen las competencias en materia educativa y que siguen en vigor los contenidos de 1991 de la LOGSE, pero matizados, hemos tomado los datos de una Comunidad Autónoma, la de Murcia, que en fecha reciente ha publicado un Decreto con los contenidos de Educación Primaria para aplicar a partir del curso 2002-2003 (BORM, 14-9-2002).

En el *Segundo Ciclo de Enseñanza Primaria*, en el bloque de Números y Operaciones aparecen por primera vez las fracciones como contenido, dentro del apartado «Necesidad de los números naturales para expresar cantidades, medidas, orden y particiones» con los siguientes epígrafes: Números fraccionarios: concepto de fracción como partes de la unidad; Términos de las fracciones; y Uso de las fracciones sencillas.

En procedimientos: Identificación, comparación y ordenación entre números naturales y entre fracciones sencillas, mediante ordenación y representación gráfica.

En el *Tercer Ciclo*, vuelven a aparecer contenidos de fracciones, dentro del apartado de «Necesidad de los números naturales y funciones de los mismos para expresar cantidades, medidas, orden y particiones», con los siguientes epígrafes: Los números fraccionarios, las fracciones (conceptos, términos); Significado de las fracciones; Comparación de fracciones; Números decimales; Fracciones decimales y números decimales; y Tantos por ciento: concepto de porcentaje; el tanto por ciento de una cantidad. Y dentro del apartado «Las operaciones de suma, resta y multiplicación. Operaciones inversas» con: Suma y resta de fracciones; Iniciación a la multiplicación y división de fracciones; Suma, resta, multiplicación y división de decimales. Situaciones en las que intervienen las operaciones con números decimales.

En procedimientos: Comparación entre fracciones sencillas y números decimales, mediante ordenación, representación gráfica y transformación de unas en otras; Automatización de los algoritmos para efectuar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división con números decimales (que tengan hasta milésimas), para multiplicar y dividir números decimales por la unidad seguida de ceros y para la suma y resta de fracciones sencillas (tengan igual o distinto denominador); Automatización del algoritmo para multiplicar y dividir fracciones

sencillas; Identificación de problemas de la vida diaria en los que intervienen una o varias de las cuatro operaciones con números naturales, decimales y/o fraccionarios.

De ahí la necesidad de una enseñanza de los conceptos de fracciones, fracciones decimales, decimales y porcentajes, así como de su relación con la vida cotidiana para que el alumno pueda ir introduciéndose en este campo numérico que más tarde completará con los números racionales.

8.2. FRACCIONES

8.2.1. Concepto

El término fracción proviene del latín *fractio* y tiene dos acepciones principales: «división de un todo en sus partes» y «las partes de un todo».

Hemos querido ver el significado en un diccionario de la lengua y hemos consultado dos. Según el Diccionario VOX de la Lengua (1982), aparecen los siguientes significados: División de un todo en partes. Parte de un todo. Cociente indicado de dos expresiones algebraicas. Número quebrado.

Según el Diccionario de la Real Academia Española (1992), los significados son: «División de una cosa en partes. Cada una de las partes separadas de un todo o consideradas como separadas. Expresión que indica una división no efectuada o que no puede efectuarse. Número quebrado».

Como veremos más adelante, el significado que se da a fracción en los diccionarios dista mucho de su verdadero significado matemático, pues resulta poco preciso y no muy claro en su definición.

Las fracciones aparecen en la vida cotidiana en multitud de ocasiones. En las tiendas de comestibles se compra un cuarto de kilo de chorizo o la mitad de un queso o tres cuartos de kilo de jamón. Las latas de refrescos y los botellines de agua contienen un tercio, medio, un quinto o litro y medio. Se compra un décimo de lotería y cuando se mira el reloj se interpreta la posición de las agujas diciendo que es la una y cuarto, las siete y media o la nueve menos cuarto, y en la confitería se compra media docena de magdalenas, y en la frutería kilo y medio de manzanas.

Las fracciones forman un conjunto de números con unas propiedades distintas de las propiedades de los números naturales, pues mientras que entre números

naturales es fácil comprender que 3 es menor que 5, y ponemos $3 < 5$, en fracciones ocurre lo contrario que de dos fracciones que tengan el mismo numerador es mayor

la que tiene denominador más bajo y $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.

En todos estos casos se ha utilizado un par de números naturales dados en un orden, y eso es una **fracción**.

Fracción es un par de números naturales escritos de la forma $\frac{a}{b}$ y que admite diferentes interpretaciones.

Así, la fracción $\frac{3}{4}$ admite las siguientes interpretaciones:

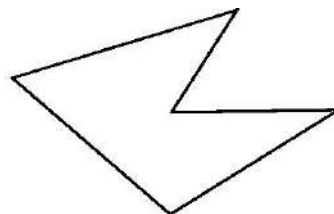
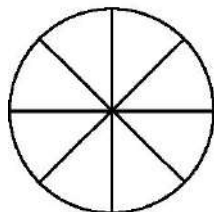
a) *Para indicar la relación entre una parte y un todo.*



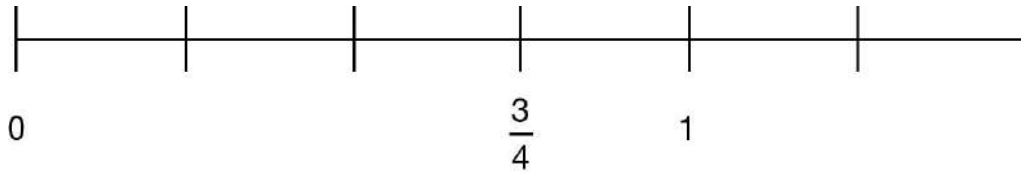
La parte sombreada de la figura la forman tres cuadrados iguales, y el todo lo forman cuatro cuadrados iguales.

Cuando un todo que puede ser continuo o discreto se divide en partes iguales, la fracción indica la relación entre número de partes que se toman y el número total de partes en que se ha dividido el todo.

Una superficie como un círculo se puede subdividir en las partes iguales que queramos, pero un pentágono irregular no es posible, ya que todas las partes han de ser del mismo tamaño.



b) *Un punto sobre una recta numérica.*



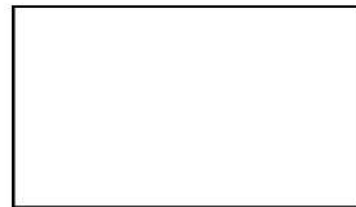
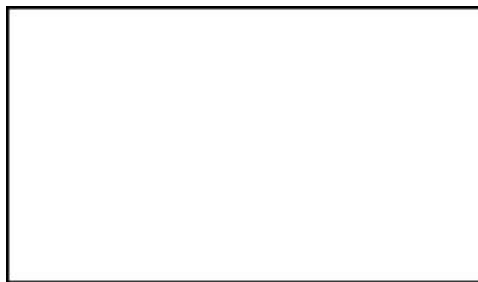
Si la unidad se divide en 4 partes iguales y se señalan 3, tenemos la fracción $\frac{3}{4}$.

c) *El resultado de una división.*

$\frac{3}{4}$ es igual a $3 : 4$



d) *Como razón o método de comparación de situaciones o de tamaños o de conjuntos de dos medidas.*



Aquí tienes dos fotografías con una reducción de $\frac{3}{4}$.

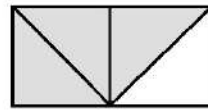
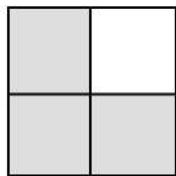
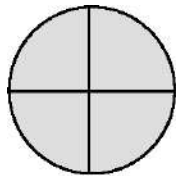
e) *Como operador cuando actúa sobre una situación inicial y la modifica.*

8.2.2. Las fracciones como relaciones parte-todo

Cuando un todo continuo se divide en partes iguales, la fracción indica la relación entre número de partes que se toman y el total de partes en que se ha dividido el todo. Para poder interpretar la fracción como relación parte-todo es necesario:

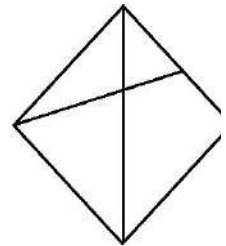
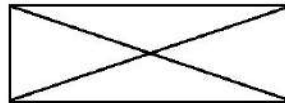
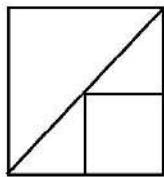
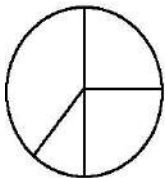
- 1) Que la región o superficie sea divisible.
- 2) Que el todo pueda dividirse en el número de partes que se pida.
- 3) Que las partes han de agotar o cubrir el todo.
- 4) Que las partes sean del mismo tamaño.
- 5) Que, a su vez, las partes puedan dividirse como todos.
- 6) Que el todo se conserve.

Así, una superficie que represente el todo puede ser un círculo, un cuadrado, un rectángulo, etc.



y dividirlo en 4 partes tomando 3. Todos ellos representan la fracción $\frac{3}{4}$ y cumplen con las condiciones antes mencionadas.

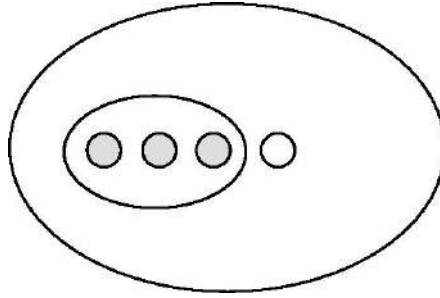
Por el contrario estas otras representaciones:



no cumplen alguna de las condiciones anteriores y no representan la fracción $\frac{3}{4}$.

En un contexto continuo, hemos visto que el todo se divide en partes de la misma forma, congruentes equivalentes, como cantidad de superficie, mientras que cuando el contexto es discreto el todo se divide en partes congruentes equivalentes como cantidad de objetos.

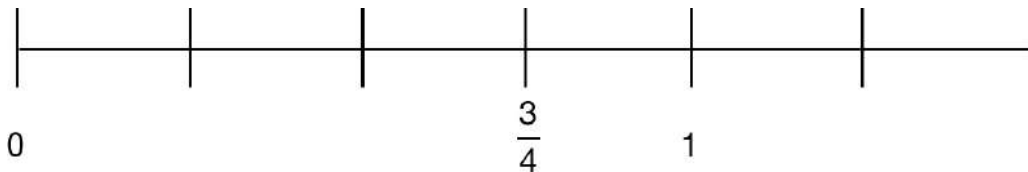
Así la fracción $\frac{3}{4}$ se puede representar:



en donde el todo está representado por 4 fichas y 3 de ellas son de color. La relación $\frac{3}{4}$ indica la relación entre las fichas de color y el número total de fichas.

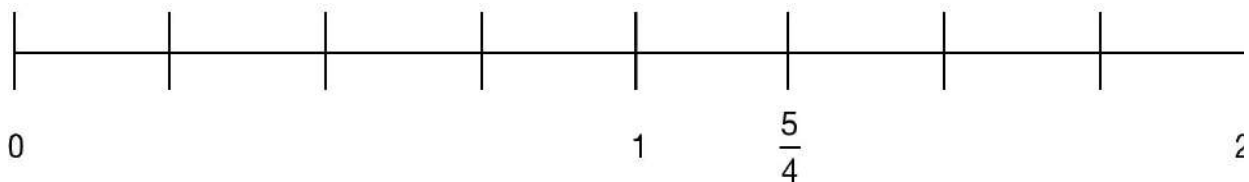
8.2.3. Las fracciones como puntos sobre la recta

Si la unidad se divide en 4 partes iguales y se señalan 3, tenemos la fracción $\frac{3}{4}$.

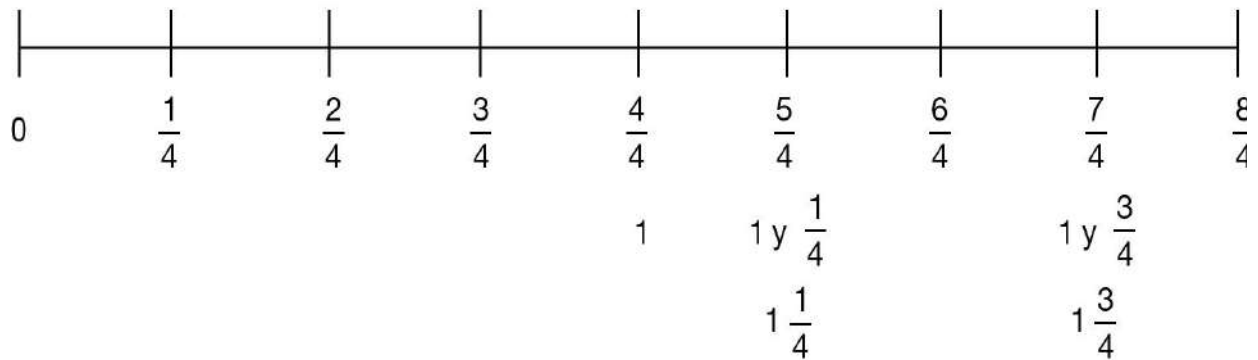


Se puede considerar como un caso particular de la relación parte-todo que se reduce a un número abstracto y tiene la enorme ventaja que cuando en la fracción $\frac{a}{b}$ es $a > b$, denominada **fracción impropia**, aparece más natural.

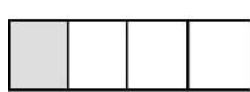
Así, para representar $\frac{5}{4}$ sería:



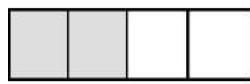
Además, como en el conjunto de los números naturales se representa sobre una recta, al representar las fracciones se va «rellenando» la recta con nuevos números, en este caso con fracciones. Así $\frac{1}{4}$ es un número entre 0 y 1, mientras que $\frac{5}{4}$ es un número entre 1 y 2. De esta forma las fracciones impropias aparecen de forma más sencilla ya que las fracciones se consideran como una ampliación de los números naturales que rellenan huecos entre los números naturales de la recta, pudiendo además relacionarlos con la idea de medida, proporcionando el contexto natural para la suma o para la resta de medidas.



Como hemos dicho, la introducción de las fracciones impropias representa una dificultad porque es fuente de muchos errores y para ello es preciso hacerlo de forma secuenciada. De ahí que su representación en la recta numérica puede preceder a la representación de parte-todo. Acabamos de verlo en la recta, en la expresión parte todo, sería:



1 de 4 es $\frac{1}{4}$ y se lee un cuarto.



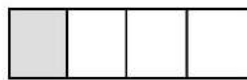
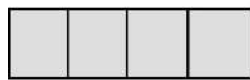
2 de 4 es $\frac{2}{4}$ y se lee dos cuartos.



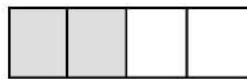
3 de 4 es $\frac{3}{4}$ y se lee tres cuartos.



4 de 4 es $\frac{4}{4}$ o 1 unidad y se lee cuatro cuartos.



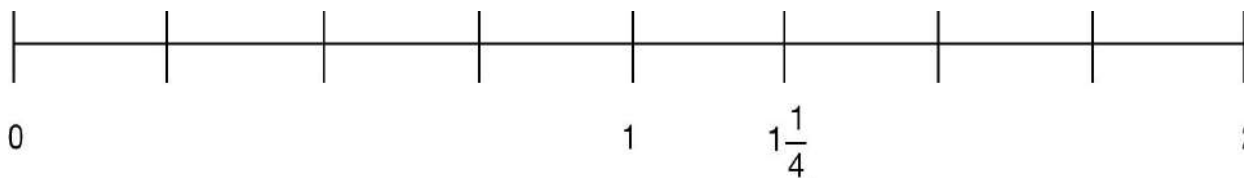
5 de 4 es $\frac{5}{4}$ o 1 y $\frac{1}{4}$ y es $1\frac{1}{4}$. Se lee cinco cuartos o uno y un cuarto.



6 de 4 es $\frac{6}{4}$ o 1 y $\frac{2}{4}$ y es $1\frac{2}{4}$. Se lee seis cuartos o uno y dos cuartos.

De esta forma se ve la equivalencia entre fracción impropia y la expresión como número mixto compuesto de parte entera y parte fraccionaria.

Las fracciones impropias son mayores que 1 y al convertirlas en número mixto el entero que se obtiene nos indica entre qué números enteros está la fracción impropia. Así, la fracción $\frac{5}{4}$ es impropia y como número mixto es $1\frac{1}{4}$, por lo tanto sobre la recta numérica se representa por:



Cuando el todo se divide en partes iguales según el número en que se divide, cada una de las partes es:

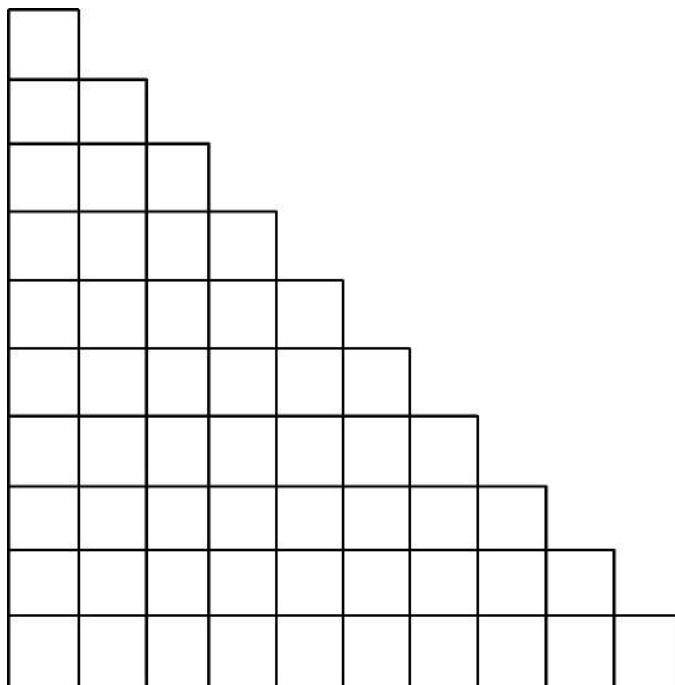
— Si se divide en dos es $\frac{1}{2}$ y se lee un medio.

— Si se divide en tres es $\frac{1}{3}$ y se lee un tercio.

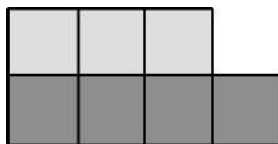
- Si se divide en cuatro es $\frac{1}{4}$ y se lee un cuarto.
 - Si se divide en cinco es $\frac{1}{5}$ y se lee un quinto.
 - Si se divide en seis es $\frac{1}{6}$ y se lee un sexto.
 - Si se divide en siete es $\frac{1}{7}$ y se lee un séptimo.
 - Si se divide en ocho es $\frac{1}{8}$ y se lee un octavo.
 - Si se divide en nueve es $\frac{1}{9}$ y se lee un noveno.
 - Si se divide en diez es $\frac{1}{10}$ y se lee un décimo.
 - Si se divide en once es $\frac{1}{11}$ y se lee un onceavo.
 - Si se divide en más se lee diciendo el número de partes terminado en *avo*.
- Así $\frac{1}{20}$ se lee un veinteavo y $\frac{1}{36}$ un treinta y seis-avo.

Las regletas de Cuisenaire ayudan a interpretar las fracciones, ya que:

- Blanca
- Roja
- Verde clara
- Rosa
- Amarilla
- Verde oscura
- Negra
- Marrón
- Azul
- Naranja



La fracción $\frac{3}{4}$ la representaríamos así:



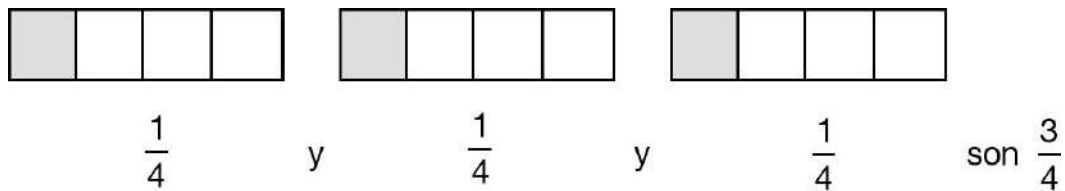
Señalando que el todo se divide en 4 partes y se toman 3.

8.2.4. Las fracciones como cociente

Asocia a la fracción $\frac{a}{b}$ la operación de dividir un número natural a por otro número natural b , es decir $a : b$.

Si tenemos $\frac{3}{4}$ se identifica como repartir de forma equitativa 3 unidades entre 4 personas, que es diferente en su interpretación que dividir un todo en 4 partes y tomar 3, aunque el resultado sea el mismo.

Si tenemos 3 chocolatinas que hay que repartir de forma equitativa entre 4 niños, hacemos:



La interpretación de la fracción como cociente aparece en un contexto de reparto. El niño que reparte al ver que tiene menos chocolatinas que niños, divide las chocolatinas por la mitad y las reparte sobrándole dos mitades. Las dos que le sobran las divide por la mitad y les da un trozo a cada uno terminándose el reparto. Por tanto a cada niño le dio:



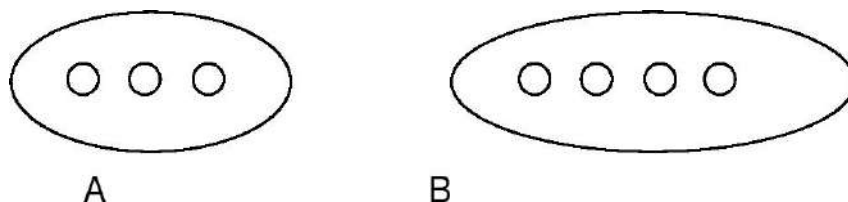
Las fracciones como cociente tienen una mejor interpretación cuando se utilizan contextos discretos que cuando se utilizan contexto continuos y más cuando se trata de fracciones impropias. Así, cuando se trata de repartir 10 caramelos entre 5 niños, a cada niño le corresponde la fracción $\frac{10}{5}$.

López Carretero (1985) considera tres momentos para acceder al concepto de fracción:

- En un primer momento: ¿Cómo repartirás 4 dulces entre 5 niños? El niño parte 3 dulces por la mitad y los reparte, y después con un dulce y medio que le queda, el entero lo divide en tres partes y el medio en dos, teniendo cinco partes, aunque no equivalentes, y los reparte.
- En un segundo momento al repartir 8 naranjas entre 6 niños, el niño da una a cada uno y fracciona las dos enteras restantes en cuartos y distribuye entre los seis niños sobrándole 2 cuartos, los que divide en tres partes cada uno y los reparte de nuevo. Cada uno recibe: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.
- En un tercer momento para repartir 3 manzanas a 4 niños el niño resuelve hacer 12 partes iguales y da $\frac{3}{4}$ a cada uno.

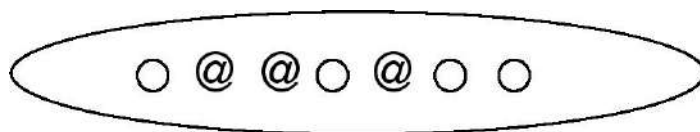
8.2.5. Las fracciones como razón

Este aspecto de la fracción es una aplicación en la vida cotidiana de la idea de razón o de escala útiles en la confección de planos. Así:



A tiene los $\frac{3}{4}$ de las bolas de B, o B tiene los $\frac{4}{3}$ de las bolas de A.

Si en una bolsa hay tres bolas blancas y 4 bolas negras, $\frac{3}{4}$ representa la razón entre las bolas blancas y las bolas negras.



En el caso de una fotocopidora al ampliar o reducir $\frac{3}{4}$ es una reducción, mientras que $\frac{4}{3}$ es una ampliación del original, de la unidad.

8.2.6. Las fracciones como operador

En este caso, las fracciones son consideradas como transformaciones, actuando sobre una situación modificándola.

En un contexto discreto, si Alberto tiene 24 canicas y aplica el operador $\frac{3}{4}$ significa «multiplicar por 3 y dividir por 4 el estado inicial», resultando 18 canicas y 18 son los $\frac{3}{4}$ de 24.

En este caso siempre las fracciones van acompañadas de una situación sobre la que actuar. El operador lleva siempre implícito un convenio, actuando primero la multiplicación y luego la división (o viceversa).

Las distintas interpretaciones de una fracción no se consideran de forma aislada ya que están relacionadas unas con otras de una manera más o menos fuerte y servirán para introducir el concepto de fracción a distintos niveles educativos en función de la etapa evolutiva del niño.

En lo que sigue utilizaremos la interpretación parte-todo por ser la que mejor se adecua al desarrollo evolutivo del niño de Primaria.

Es importante, para que el alumno incorpore el concepto de fracción, secuenciar los siguientes pasos:

1. Identificar el número de unidades y cantidades que sean mayores o menores que la unidad.
2. Utilizar materiales diversos para identificar el número de partes de la unidad.
3. Designar oralmente las partes de la unidad.
4. Representar fracciones mediante dibujos.
5. Ampliar a fracciones impropias.

Comparando los tres usos más frecuentes de la fracción $\frac{3}{4}$:

$\frac{3}{4}$ (parte-todo), $3 : 4$ (como división), tres cuartos de... (como operador) resulta:

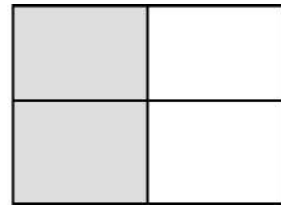
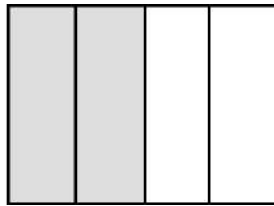
$\frac{3}{4}$ reclama más una imagen 

$3 : 4$ reclama una acción: $3 : 4 = 0,75$.

Tres cuartos de... piden una imagen y una acción.

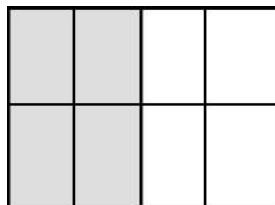
8.3. FRACCIONES EQUIVALENTES

Si un folio lo doblamos por la mitad, cada una de las dos partes iguales es $\frac{1}{2}$. Si a su vez establecemos otro doblez por la mitad, podemos tener el folio inicial doblado de dos formas:



en ambos casos hemos doblado el folio (dividido el todo), unidad inicial, en cuatro partes iguales y señalados dos, se tiene la fracción $\frac{2}{4}$. Observamos que la parte sombreada es la misma y que los $\frac{2}{4}$ equivale a $\frac{1}{2}$.

Si efectuamos un nuevo doblez por la mitad quedaría:



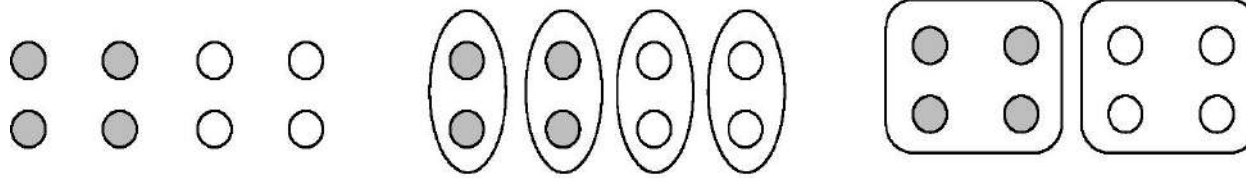
siendo la parte sombreada la misma, con lo que:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4} \text{ y } \frac{4}{8}$$

representan la misma relación entre la parte sombreada y el todo. Se dice que:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4} \text{ y } \frac{4}{8} \text{ son equivalentes.}$$

En contextos discretos y en la recta numérica ocurre otro tanto:



4 de 8

2 de 4

1 de 2



4 de 8

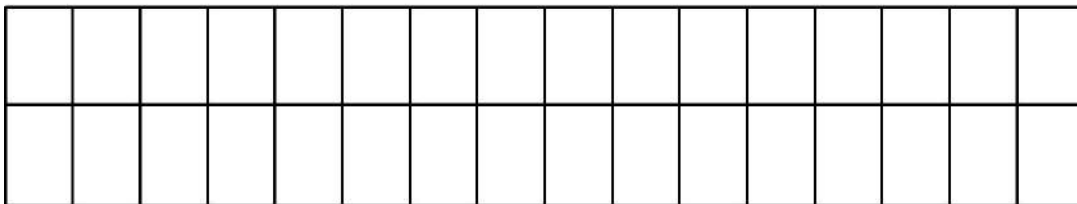


2 de 4



1 de 2

Llinares y Sánchez (1988) exponen un procedimiento para introducir las fracciones equivalentes conectando los dobleces de una hoja y la recta numérica, así:



$\frac{1}{2}$

1

$\frac{3}{2}$

2

$\frac{5}{2}$

3

$\frac{7}{2}$

4

$\frac{2}{4}$

$\frac{4}{4}$

$\frac{6}{4}$

$\frac{8}{4}$

$\frac{10}{4}$

$\frac{12}{4}$

$\frac{14}{4}$

$\frac{16}{4}$

obteniendo así las fracciones equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}; 1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}; \frac{3}{2} = \frac{6}{4}; 2 = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}; \dots$$

De esta forma se puede llegar a deducir fracciones equivalentes, ya que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} \text{ y que } \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{4 \times 2}{2 \times 2}$$

llegando a comprobar rápidamente que cuando se multiplican los dos números de una fracción por un mismo número se obtiene una fracción equivalente a la primera.

También es fácil de deducir que en dos fracciones equivalentes, se verifica:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \quad \text{si} \quad 1 \times 4 = 2 \times 2$$

y en general:

Para que dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ sean equivalentes:

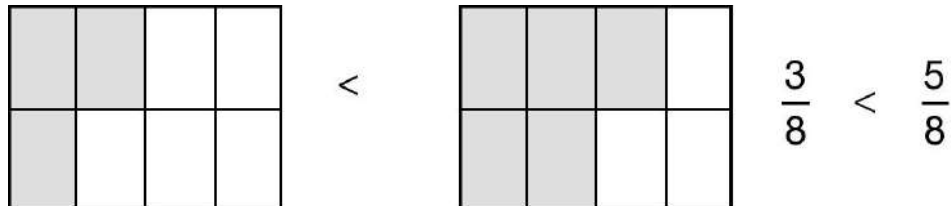
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a \times d = b \times c$$

Dos fracciones equivalentes representan la misma zona sombreada en la relación parte-todo y de ahí que dos fracciones equivalentes representen la misma fracción.

De todas las fracciones equivalentes a una dada, la que tiene números más pequeños se denomina **fracción irreducible**.

Si queremos **comparar** dos fracciones que tengan el mismo denominador, directamente podemos hacerlo, basta con ver sus numeradores.

Así para comparar $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$ basta con observarlo en dos folios en los que hemos efectuado cuatro dobleces, señalando en un folio tres de las partes y en el otro 5, la parte señalada en el segundo es mayor que la señalada en el primero y podemos decir que:



Sin embargo, cuando los denominadores son distintos es más difícil de determinar, debiendo tomar fracciones equivalentes a cada fracción y compararlas cuando tengan el mismo denominador.

Así, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ tienen distinto denominador y para compararlas hacemos:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

Como $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ podemos afirmar que $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Pero también podemos aprovechar la equivalencia de fracciones y decir que como $2 \times 4 < 3 \times 3$ entonces $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

En general, dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$

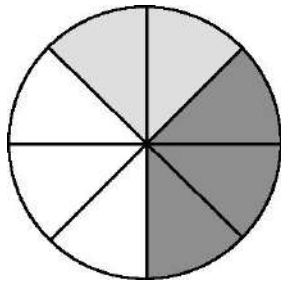
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad axd < bxc \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad axd > bxc$$

El concepto de equivalencia va a ser de mucha utilidad para efectuar sumas y restas de fracciones de distinto denominador.

8.4. SUMA DE FRACCIONES

La suma de dos fracciones cuando tienen el mismo denominador, se suele presentar mediante un sencillo problema.

Si Andrés se come $\frac{2}{8}$ de pizza y su hermana Rosa $\frac{3}{8}$, ¿cuánto se han comido entre los dos?

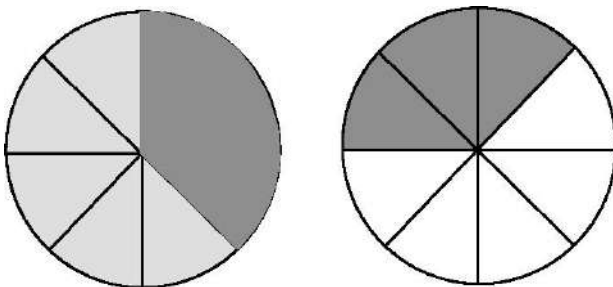


$$\frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Se representa sobre un mismo todo dividido en 8 partes iguales y se señalan $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{8}$. Entre los dos hermanos se han comido $\frac{5}{8}$ de pizza.

La suma de dos fracciones del mismo denominador es otra fracción del mismo denominador y como numerador la suma de los numeradores de las dos fracciones dadas.

Cuando el total excede de una unidad, conviene representarlo así:



$$\frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$$

Cuando las fracciones tienen distinto denominador, entonces hay que utilizar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador para entonces poder aplicar lo que acabamos de decir para fracciones de igual denominador.

Así para sumar $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ hacemos:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \frac{10}{25} \text{ y } \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} \text{ de donde}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$$

Observarás que es lo mismo que si hiciésemos:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{2 \times 4 + 5 \times 1}{5 \times 4} = \frac{8 + 5}{20} = \frac{13}{20}$$

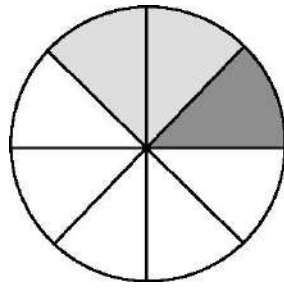
En general para sumar fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$$

8.5. RESTA DE FRACCIONES

Si Andrés se ha comido $\frac{2}{8}$ de pizza y Rosa $\frac{3}{8}$ de pizza, ¿cuánto más ha comido Rosa que Andrés?

Señalando en un gráfico lo que come Rosa y lo que come Andrés, se ve claramente que:



$$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$$

Rosa ha comido $\frac{1}{8}$ de pizza más que Andrés.

La diferencia de dos fracciones del mismo denominador es otra fracción de igual denominador y de numerador la diferencia de los numeradores.

Cuando las fracciones tienen distinto denominador, tenemos que buscar fracciones equivalentes, para entonces tener el mismo denominador y restar los numeradores.

Así:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Es lo mismo que si hacemos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4 - 3 \times 1}{3 \times 4} = \frac{4 - 3}{12} = \frac{1}{12}$$

En general para restar fracciones:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

8.6. PRODUCTO DE FRACCIONES

Para comprender las operaciones que se realizan al efectuar la multiplicación de fracciones es conveniente efectuar su representación gráfica.

Así, para multiplicar $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$ primero dividimos un todo en 3 partes y tomamos 2.



Ahora considerando esas 2 partes como un todo lo dividimos en 4 y tomamos 1.

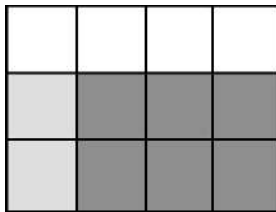


Por lo tanto, el todo queda dividido en 6 partes y se toma 1:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \text{ o } \frac{1}{6}$$

Para la multiplicación de fracciones se establece un sistema de fácil comprensión utilizando el área de un rectángulo.

El todo se descompone de forma horizontal en 3 partes y se toman 2. Verticalmente se descompone el todo en 4 partes y se toma 1. La zona común son 2 partes de las 12 en que ha quedado dividido el todo.



$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \text{ o } \frac{1}{6}$$

Otro procedimiento es utilizándolo como operador. Aplicando los dos operadores sucesivamente a un número se tiene:

$$30 \xrightarrow{\times \frac{2}{3}} 20 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} 5$$

Es decir $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de 30 es 5 y por tanto: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times 30 = 5$.

Ambos operadores pueden ser reemplazados por sus equivalentes de $\frac{1}{4}$ y de $\frac{2}{3}$ que son $\frac{2}{12}$ o $\frac{1}{6}$

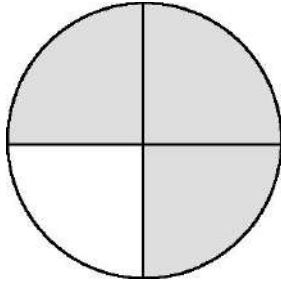
$$30 \xrightarrow{\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}} 5$$

En general para multiplicar fracciones:

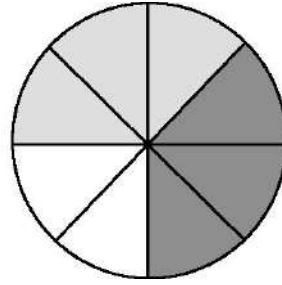
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

El producto de dos fracciones es otra fracción de numerador el producto de numeradores y de denominador el producto de denominadores.

Si quedaban $\frac{3}{4}$ de una tarta y me comí $\frac{1}{2}$, ¿qué porción de tarta entera me comí?



$$\frac{1}{2}$$



La parte rayada son los $\frac{3}{8}$.

8.7. PROPIEDADES DE LA SUMA Y DEL PRODUCTO

Tanto la suma como el producto tienen las siguientes propiedades:

Propiedad conmutativa:

— Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

En efecto:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 5 \times 1}{5 \times 4} = \frac{17}{20} \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{1 \times 5 + 4 \times 3}{4 \times 5} = \frac{17}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{5}$$

— Producto: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3 \times 1}{5 \times 4} = \frac{3}{20} \\ \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{4 \times 5} = \frac{3}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$$

Propiedad asociativa

— Suma: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} &= \frac{3 \times 4 + 5 \times 1}{5 \times 4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{20} + \frac{2}{3} = \frac{17 \times 3 + 20 \times 2}{20 \times 3} = \frac{91}{60} \\ \frac{3}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{5} + \frac{1 \times 3 + 4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{3}{5} + \frac{11}{12} = \frac{3 \times 12 + 5 \times 11}{5 \times 12} = \frac{91}{60} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3} = \frac{3}{5} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right)$$

Producto: $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{3} &= \frac{3 \times 1}{5 \times 4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{20} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{60} \\ \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{5} \times \frac{1 \times 2}{4 \times 3} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{12} = \frac{6}{60} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\right)$$

Propiedad distributiva

Producto respecto de la suma: $\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \times \frac{e}{f}\right)$

En efecto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{5} \times \frac{1 \times 3 + 4 \times 2}{4 \times 3} = \frac{3}{5} \times \frac{11}{12} = \frac{33}{60} \\ \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right) &= \frac{3 \times 1}{5 \times 4} + \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{3}{20} + \frac{6}{15} = \frac{3 \times 15 + 20 \times 6}{20 \times 15} = \frac{165}{300} = \frac{33}{60} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}\right)$$

8.8. DIVISIÓN DE FRACCIONES

La división se introduce con la idea de fracción inversa.

Si señalamos los $\frac{3}{4}$ de una cuartilla de forma gráfica:



Tomando ahora la parte sombreada como el todo, la cuartilla son los $\frac{4}{3}$. De esta forma $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{3}$ es la unidad y $\frac{4}{3}$ es la fracción inversa de $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{4} : \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

Así, para calcular $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, tenemos que aplicar la fracción inversa de $\frac{3}{4}$, es decir, $\frac{4}{3}$, luego:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

En general para dividir fracciones:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

El cociente de dos fracciones es otra fracción que resulta de multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda.

Los números racionales son los que se pueden presentar por medio de fracciones. Entre los números racionales se pueden realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, resultando siempre un número racional.

Recuerda que los números enteros son números racionales pues, por ejemplo:

$$2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \dots$$

8.9. FRACCIONES DECIMALES. NÚMEROS DECIMALES. PORCENTAJES

8.9.1. Conceptos

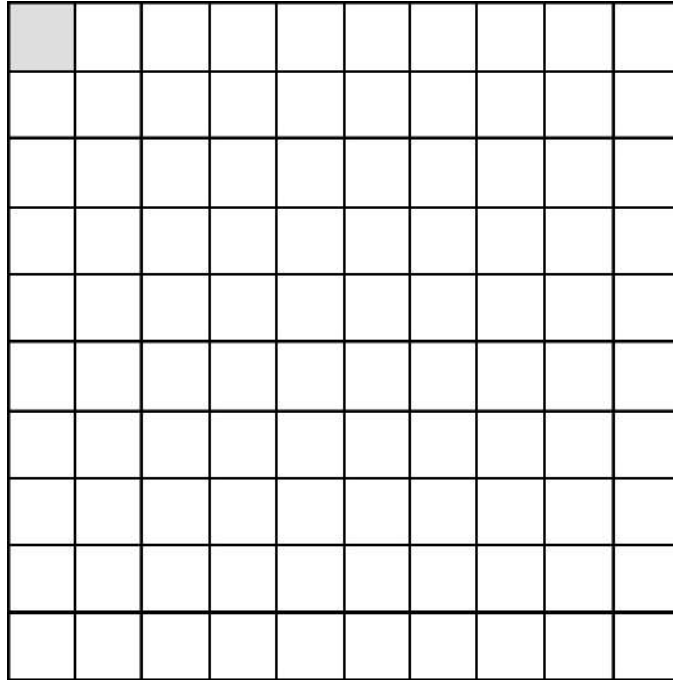
Una fracción decimal es una fracción cuyo denominador es la unidad seguida de ceros.

- Cuando el denominador es 10, la fracción decimal se lee nombrando el numerador seguido de la palabra décimas.
- Cuando el denominador es 100, la fracción decimal se lee nombrando el numerador seguido de la palabra centésimas y cuando es 1.000 se lee el numerador seguido de la palabra milésimas.

Se pueden introducir las fracciones decimales aglutinando la relación parte-todo con las características del sistema de numeración decimal. Si tenemos un todo y lo dividimos en diez partes iguales, cada una de las partes es $\frac{1}{10}$ y se lee una décima.

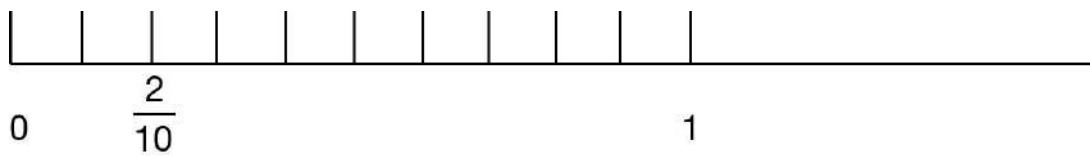


A su vez si cada parte (décima) la dividimos en 10 partes iguales, cada parte es $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$ es $\frac{1}{100}$ y se lee una centésima.



Así, por ejemplo, 2 décimas son $\frac{2}{10}$ y en forma decimal 0,2 y 5 centésimas son $\frac{5}{100}$ y en forma decimal 0,05.

Una manera de analizar el significado de los decimales además de subáreas de una región unitaria como parte-todo es como puntos de una recta numérica, es decir:



Toda fracción decimal se puede expresar como número decimal. Basta con escribir el numerador separado con una coma a partir de su derecha tantas cifras como ceros tenga el denominador.

$$\frac{17}{10} = 1,7, \quad \frac{21}{100} = 0,21, \quad \frac{31}{1000} = 0,031$$

Todo número decimal consta de dos partes, la parte entera situada a la izquierda de la coma y la parte decimal situada a la derecha de la coma. Para leer un número decimal se lee en primer lugar la parte entera y a continuación la parte decimal, dándole el nombre de la última cifra decimal.

Así:

1,7 se lee un entero y siete décimas (uno coma siete).

0,21 se lee cero enteros y veintiuna centésimas (cero coma veintiuno).

0,031 se lee cero enteros y treinta y una milésima (cero coma cero treinta y uno).

Toda fracción tiene sentido como decimal, pero no siempre un decimal tiene sentido como fracción. Así, habitualmente se dice que un niño mide 1,65 m, pero no tiene sentido decir que mide $\frac{165}{100}$ metros.

Los **porcentajes** tienen asignado un papel de operador, ya que actúan sobre una cantidad.

Así hablar del 35% de una cantidad equivale a multiplicar dicha cantidad por 0,35 o por $\frac{35}{100}$. El 35% de 20 es $0,35 \times 20$, o bien $\frac{35}{100} \times 20$, que significa multiplicar por 35 y dividir por 100, resultando 7.

8.9.2. Equivalencia de decimales

Se ha obtenido anteriormente una fracción equivalente a una dada multiplicando numerador y denominador por un mismo número.

Fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ son: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \dots$, resultado de multiplicar por 1, por 2, por 3, por 4, etc., numerador y denominador de la fracción dada.

Como los decimales son la expresión de fracciones decimales, podemos obtener fracciones equivalentes a una dada multiplicando numerador y denominador por 10, 100, 1.000, etc.

Así 2 décimas es 0,2 o $\frac{2}{10}$ y equivale a $\frac{20}{100}$ que son 20 centésimas, a $\frac{200}{1.000}$ que son 200 milésimas y así sucesivamente.

Si queremos **comparar** dos números decimales bastará con comparar sus fracciones decimales. Así para comparar 0,34 y 0,27 los expresamos mediante sus fracciones equivalentes y $\frac{34}{100} > \frac{27}{100}$.

Si queremos comparar 0,4 y 0,38 no es fácil si ponemos 4 décimas y 38 centésimas, habría que ponerlos en la misma unidad, es decir, 40 centésimas y 38 centésimas para poder afirmar que $0,4 > 0,38$. Esto se consigue utilizando fracciones equivalentes.

Para poder intercalar un número decimal entre dos dados, también hemos de aplicar decimales equivalentes. Si nos piden intercalar un número entre 0,35 y 0,36 es necesario reconocer que 0,350 es equivalente a 0,35 y 0,360 equivalente a 0,36.

En la mayor parte de las aplicaciones de los porcentajes se encuentran nociones de equivalencia aunque sea implícitamente, guardando relación con el aspecto de razón de fracciones.

Los porcentajes están presentes en la vida cotidiana en muchos acontecimientos. Cuando hay rebajas se hace un 10%, un 20% y hasta un 50% de descuento y hay que tener asimilado el principio de equivalencia de fracciones porque el 10% de una cantidad equivale a multiplicar por $\frac{10}{100}$ o por $\frac{1}{10}$ o por 0,1.

Representar números con varios materiales es importante para reconocer equivalencias y comprender que $\frac{1}{4}$, 25% y 0,25 son diferentes nombres para representar el mismo número.

Uno de los significados de las fracciones es como división. Así $\frac{3}{5}$ se puede interpretar como $3 : 5$ y dividiendo numerador por denominador, obtener el decimal 0,6. Aunque $\frac{3}{5}$ no tiene como denominador 10, 100 o 1.000, es equivalente a $\frac{6}{10}$ y de ahí que $\frac{3}{5}$ sea equivalente a una fracción decimal.

Cuando al dividir el numerador por el denominador de una fracción aproximando el cociente resulte un resto cero, el número es **decimal** o **decimal exacto**.

Así:

$$\frac{8}{5} = 1,6; \quad \frac{17}{2} = 8,5; \quad \frac{3}{4} = 0,75; \quad \frac{2}{25} = 0,08$$

Todos estos son números decimales exactos.

Sin embargo, no siempre al aproximar el cociente nos resulta un resto cero. Cuando esto ocurre decimos que el número decimal es periódico, pudiendo ser periódico puro y periódico mixto.

Número decimal periódico puro es el que resulta al dividir el numerador por el denominador de una fracción aproximando el cociente sin obtener resto cero y en el cociente hay un grupo de cifras que se repiten indefinidamente a partir de la coma, denominado período.

Así:

$$\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,3 \text{ es un número decimal periódico puro de período 3.}$$

$$\frac{19}{11} = 1,7272727272... = 1,72 \text{ es un número decimal periódico puro de período 72.}$$

Número decimal periódico mixto es el que resulta de dividir el numerador por el denominador de una fracción aproximando el cociente con decimales sin obtener resto cero. En el cociente hay un grupo de cifras que no se repiten, llamado anteperíodo o parte no periódica que está a continuación de la coma, seguida del grupo de cifras que se repiten llamado período.

Así:

$$\frac{16}{15} = 1,06666 = 1,06 \text{ La parte entera es 1, el período es 6 y el anteperíodo es 0.}$$

$$\frac{63}{22} = 2,8636363 = 2,863 \text{ La parte entera es 2, el período es 63 y el anteperíodo es 8.}$$

8.10. OPERACIONES CON DECIMALES EXACTOS

8.10.1. Suma

Para sumar números decimales exactos se colocan unos debajo de otros haciendo coincidir las comas en columna, sumando como si fuesen enteros y poniendo la coma en el resultando final debajo de las comas de los sumandos.

Así:

$$\begin{array}{r} 245 \\ + 128 \\ \hline 373 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,45 \\ + 1,28 \\ \hline 3,73 \end{array}$$

Se pueden utilizar los bloques multibase de Dienes y sumar $245 + 128$ y después $2,45 + 1,28$. En el primer caso, el cubo pequeño se tomará como unidad mientras que en el segundo, la placa será la unidad, siendo el número de bloques utilizados el mismo.

8.10.2. Resta

Para restar dos números decimales exactos se coloca el minuendo y debajo el sustraendo haciendo coincidir las comas en columna. Se restan como si fuesen números enteros y se coloca la coma en el resultado final debajo de las comas del minuendo y sustraendo.

Así:

$$\begin{array}{r} 245 \\ - 128 \\ \hline 117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,45 \\ - 1,28 \\ \hline 1,17 \end{array}$$

Con los bloques multibase haríamos como en el caso anterior pero restando.

8.10.3. Multiplicación

Para multiplicar dos números decimales exactos se coloca uno debajo del otro y se multiplican. Del producto se separa con una coma, contando de derecha a izquierda, tantas cifras decimales como sumen entre los dos factores.

$$\begin{array}{r} 24,5 \\ \times 1,28 \\ \hline 31,360 \end{array}$$

Sin embargo, en el producto, no podemos decir que sea una operación análoga en el caso de los números enteros y de los números decimales.

Con números enteros podíamos interpretar el producto 4×5 como una suma reiterada diciendo que 4×5 es 4 veces 5, pero con decimales $3,8 \times 5,2$ no podemos decir 3,8 veces 5,2 porque no tiene sentido.

El significado de la multiplicación de números decimales, al igual que con las fracciones, es del producto como área. Tiene sentido calcular el área de un rectángulo de 3,8 m x 5,2 m.

8.10.4. División

Para dividir dos números decimales exactos previamente se multiplican dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el denominador. Después se realiza la división aproximando el cociente hasta la cifra decimal deseada.

La enseñanza de la multiplicación y división de números decimales resulta complicada tanto por el procedimiento a seguir como por la comprensión de los alumnos. Muchos niños consiguen lograr el algoritmo de la multiplicación y división, pero a la larga no los retienen o cuando los aplican a situaciones cotidianas lo hacen equivocadamente. En estos casos interesa favorecer la estimación y la utilización de las calculadoras, por lo que conviene introducirlos en su manejo adecuado.

8.11. PASO DE UN NÚMERO DECIMAL A FRACCIÓN. OPERACIONES

8.11.1. Número decimal exacto

Para expresar un número decimal exacto como fracción colocamos como numerador el número decimal sin la coma y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número dado.

Así:

$$3,5 = \frac{35}{10}; \quad 4,28 = \frac{428}{100}; \quad 12,173 = \frac{12.173}{1.000}$$

8.11.2. Número decimal periódico puro

Para expresar un número decimal periódico puro como fracción, se obtiene de la siguiente manera:

Si queremos expresar $0,\widehat{3}$ en forma de fracción, ponemos:

$$n = 0,\widehat{3}$$

y multiplicamos los dos miembros por la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga el período, aquí por 10:

$$10n = 3,\widehat{3}$$

restamos miembro a miembro y operamos

$$10n - n = 3,\widehat{3} - 0,\widehat{3} = 3 \Rightarrow 9n = 3, \text{ de donde: } n = \frac{3}{9}$$

Si el número fuera $7,\widehat{45}$, hacemos:

$$\begin{aligned} n &= 7,\widehat{45} \\ 100n &= 745,\widehat{45} \\ \hline 99n &= 738 \Rightarrow n = \frac{738}{99} \end{aligned}$$

8.11.3. Número decimal periódico mixto

Para expresar un número decimal periódico mixto como fracción se pasa primero a periódico puro y se aplica el procedimiento anterior.

Así para expresar $4,2\overline{87}$ como fracción hacemos:

- 1) Se transforma en periódico puro multiplicando por 10 porque hay una cifra en el anteperíodo:

$$10n = 42,\overline{87}$$

- 2) Se multiplican los dos miembros por 100 porque hay dos cifras en el período:

$$1.000n = 4287,\overline{87}$$

- 3) Se restan las dos igualdades miembro a miembro:

$$1.000n - 10n = 4287,\overline{87} - 42,\overline{87} \Rightarrow 990n = 4.245 \Rightarrow n = \frac{4.245}{990}$$

8.11.4. Operaciones

Para efectuar cualquier operación con números decimales, tanto exactos como periódicos, se procede así:

- 1) Se expresa cada número en forma de fracción.
- 2) Se operan las fracciones.
- 3) Se expresa la fracción resultante en forma decimal.

Así para efectuar las cuatro operaciones con los números $1,1\overline{6}$ y $0,3\overline{}$, procedemos:

$$n = 1,1\widehat{6} \Rightarrow 10n = 11,6\widehat{6} \Rightarrow 100n = 116,6\widehat{6} \Rightarrow 100n - 10n = 105 \Rightarrow 90n = 105 =$$

$$n = \frac{105}{90} = \frac{7}{6}$$

$$n = 0,3\widehat{3} \Rightarrow 10n = 3,3\widehat{3} \Rightarrow 10n - n = 3 \Rightarrow 9n = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{— Suma: } 1,1\widehat{6} + 0,3\widehat{3} = \frac{7}{6} + \frac{1}{3} = \frac{21+6}{18} = \frac{27}{18} = 1,5$$

$$\text{— Resta: } 1,1\widehat{6} - 0,3\widehat{3} = \frac{7}{6} - \frac{1}{3} = \frac{21-6}{18} = \frac{15}{18} = 0,833333... = 0,83$$

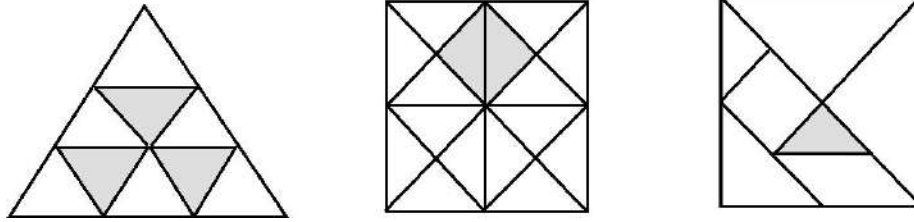
$$\text{— Multiplicación: } 1,1\widehat{6} \times 0,3\widehat{3} = \frac{7}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18} = \frac{27}{18} = 0,38888... = 0,38$$

$$\text{— División: } 1,1\widehat{6} : 0,3\widehat{3} = \frac{7}{6} : \frac{1}{3} = \frac{21}{16} = 3,5$$

Una operación entre dos números decimales periódicos, como ves, puede resultar un número decimal periódico puro, periódico mixto o decimal exacto.

8.12. JUEGOS, EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Contesta a las siguientes preguntas:
 - a) De una cuartilla, ¿cuántos octavos obtienes?
 - b) ¿Cuántos octavos hay en una cuartilla?
 - c) ¿Cuántos octavos hay en dos cuartillas?, ¿y en media cuartilla?
2. ¿Qué fracción representa la parte rayada de cada una de las figuras siguientes?



3. Sin realizar cálculos, indica la fracción menor en cada uno de los siguientes casos:

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{7}$ d) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$

4. Indica en cada caso si las fracciones son equivalentes:

a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{6}$ b) $\frac{2}{7}$ y $\frac{8}{28}$ c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{14}{20}$ d) $\frac{5}{3}$ y $\frac{40}{24}$

5. Obtén tres fracciones a cada una de las fracciones:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{20}{40}$ d) $\frac{81}{54}$

6. Obtén todas las fracciones menores equivalentes a las fracciones siguientes:

a) $\frac{9}{27}$ b) $\frac{64}{160}$ c) $\frac{25}{55}$ d) $\frac{18}{12}$

7. Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor:

a) $\frac{2}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{8}$ b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{2}, \frac{7}{8}, \frac{4}{5}, \frac{2}{10}$

8. ¿Cuál de los números $\frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{5}{16}$ y $\frac{3}{8}$ se encuentra más próximo a $\frac{3}{16}$?

9. Completa las siguientes operaciones:

a) $\frac{1}{5} + ? = \frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{3} + \frac{?}{9} = 1$ c) $1 + \frac{3}{?} = 2$ d) $2 = \frac{1}{4} + ?$

10. Toma una botella vacía de agua de 1 litro y un envase de yogur de 125 g; llena de agua el recipiente de yogur y vacíalo en la botella. ¿Cuántas veces tendrás que efectuar la operación hasta completar de agua la botella? Exprésalo utilizando fracciones.

11. Repite el razonamiento del caso anterior para botellas de agua de:

- a) 1,5 litros
- b) 2 litros
- c) 0,5 litros

12. Realiza las siguientes sumas de fracciones:

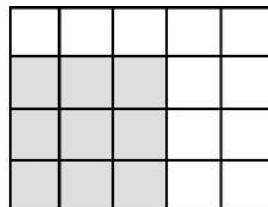
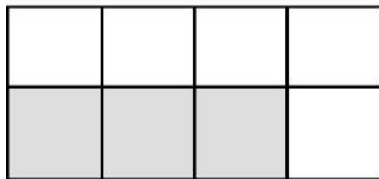
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{5}{6}$ c) $\frac{3}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

13. Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{4} - \frac{5}{3}$ c) $\frac{6}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ d) $\frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

14. ¿A partir de qué valor de x la fracción $\frac{x}{18}$ es mayor que $\frac{1}{3}$?

15. Expresa mediante producto de fracciones las siguientes representaciones gráficas:



16. Completa las siguientes tablas:

+	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	x	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
$\frac{1}{4}$					$\frac{1}{4}$				
$\frac{2}{4}$					$\frac{2}{4}$				
$\frac{3}{4}$					$\frac{3}{4}$				
$\frac{4}{4}$					$\frac{4}{4}$				

17. Escribe en el espacio en blanco una fracción para completar las siguientes igualdades:

a) $3,25 = 3 \times 1 + 2 \times \underline{\hspace{1cm}} + 5 \times \frac{1}{100}$

b) $8,276 = 8 \times 1 + 2 \times \underline{\hspace{1cm}} + 7 \times \underline{\hspace{1cm}} + 6 \times \underline{\hspace{1cm}}$

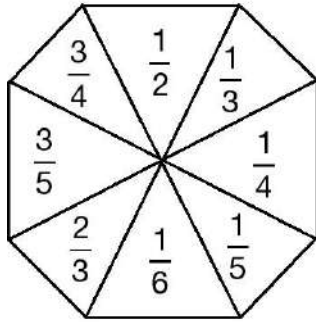
18. ¿Cuántas fracciones se encuentran entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$?

19. Cuántos números podrías escribir entre 0,41 y 0,42?

20. Expresa en forma de fracciones los siguientes números:

- a) 3,25
- b) 4,1666...
- c) 12,388888...
- d) 0,16666...
- e) 10,414141...

21. Se tiene una peonza octogonal con fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}$ y un tablero como el de la figura y cuatro jugadores con 16 fichas cada uno de distinto color.



0,5	0,2	0,6	0,75
$0,\overline{3}$	0,25	0,2	0,5
$0,1\overline{6}$	$0,\overline{6}$	$0,\overline{3}$	0,25
0,6	0,75	$0,1\overline{6}$	$0,\overline{6}$

Cada jugador lanza la peonza de fracciones y debe colocar una ficha en el lugar correspondiente del tablero de decimales. Si están ocupadas le toca el turno al siguiente. El juego acaba cuando están ocupadas todas las casillas y gana el jugador que sumando los números que ocupan sus fichas consigue el mayor total.

22. Realiza las siguientes operaciones:

a) $4,1\overline{6} + 2,\overline{3}$ b) $25,3\overline{2} - 17,8\overline{3}$ c) $5,1\overline{6} \times 3,\overline{6}$ d) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

23. Una máquina trituradora de fracciones hace lo siguiente: Si una fracción f

entra en la máquina, la procesa y sale una nueva fracción $\frac{1-f}{1+f}$

a) Si entra $\frac{1}{2}$, ¿qué fracción sale?

b) Si entra $\frac{1}{5}$, ¿qué fracción sale?

c) Si entra $\frac{2}{3}$ a la máquina y si la fracción que sale entra nuevamente y ésta se sigue procesando hasta completar 10 procesos, ¿cuál es la fracción que sale finalmente?

8.13. BIBLIOGRAFÍA

Alcalá, M. (1986). *Fracciones*. Escuela Popular: Granada.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis: Madrid.

Centeno, J. (1988). *Números decimales*. Síntesis: Madrid.

Collette, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI: Madrid.

Dickson, L. y otros (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC-Lábor: Madrid.

Hernan, F. y Carrillo, E. (1988). *Recursos en el aula de matemáticas*. Síntesis: Madrid.

Litwiler, B. (Ed.) (2002). *Making sense of fractions, ratios and proportions*. NCTM: Usa

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones*. Síntesis: Madrid.

López Cantero, A. (1985). «¿Por qué y cómo enseñar fracciones?». *Cuadernos de Pedagogía* 148. Barcelona.

Nortes Checa, A. (1993). *Matemáticas y su didáctica*. Tema: Murcia.

8.14. SOLUCIONARIO

1. a) 8, b) 8, c) 16 y 4

2. $\frac{3}{9}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{1}{16}$

3. a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{2}{5}$, c) $\frac{4}{7}$, d) $\frac{1}{2}$

4. a) No, b) Sí, c) No, d) Sí

5. Por ejemplo: a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$, b) $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12}$, c) $\frac{10}{20} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$, d) $\frac{27}{18} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

6. a) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, b) $\frac{5}{11}$, c) $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, d) $\frac{32}{80} = \frac{16}{40} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

7. a) $\frac{3}{8} < \frac{2}{4} < \frac{3}{2}$, b) $\frac{1}{5} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, c) $\frac{2}{10} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{3}{2}$

8. $\frac{5}{32}$

9. a) $\frac{2}{5}$, b) 6, c) 3, d) 7

10. La operación 8 veces

11. a) 12, b) 16, c) 4

12. a) $\frac{7}{8}$, b) $\frac{35}{18}$, c) $\frac{37}{24}$, d) $\frac{47}{60}$

13. a) $\frac{1}{15}$, b) $\frac{1}{12}$, c) $\frac{41}{30}$, d) $\frac{27}{20}$

14. $x = 7$

15. a) $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$

16. a)

$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$
$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$
$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{8}{4}$

b)

$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$
$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$
$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{12}{16}$
$\frac{4}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{16}$

17. a) $\frac{1}{10}$, b) $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$

18. Muchas. Por ejemplo: $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$, ..., $\frac{7}{16}$

19. Muchos. Por ejemplo: 0,411, 0,412, ..., 0,419

20. a) $\frac{325}{100}$, b) $\frac{375}{90}$, c) $\frac{1.115}{90}$, d) $\frac{15}{90}$, e) $\frac{1.031}{99}$

21. Realizar el juego.

22. a) 6,5, b) 7,489, c) 18,925, d) 12,5

23. a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{2}{3}$, c) $\frac{2}{3}$

9

Los algoritmos

V. Bermejo • E. Vela • Sonia Betancourt

9.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo intentaremos ofrecer algunas propuestas útiles para mejorar la enseñanza de los algoritmos. Desde hace décadas se viene investigando la validez de los algoritmos tradicionales, encontrando que los alumnos muestran grandes dificultades en la aplicación de estos procedimientos, tal vez porque no asimilan el significado de lo que están haciendo. Frecuentemente memorizan los pasos pero no los comprenden, lo que les lleva a cometer los típicos errores de orden (poner en la misma columna decenas y unidades y sumarlo como decenas) o de ejecución de los pasos (olvidarse de lo que se «llevan»).

En los años setenta del pasado siglo muchos investigadores se interesaron por el estudio de los algoritmos tradicionales para comprobar su utilidad. En sus trabajos analizaron sobre todo las formas erróneas, pero consistentes, empleadas por los niños en el uso de los algoritmos, observando que en la mayoría de los casos los niños se esforzaban en recordar los pasos más que en comprender su ejecución.

En la década de los ochenta del mismo siglo, algunos investigadores se plantearon la utilidad de los algoritmos tradicionales en contextos diferentes. Así, por ejemplo, en Brasil encuentran que los niños vendedores callejeros muestran una mayor ejecución en el cálculo con sus propios procedimientos que los niños escolarizados. Por el contrario, al intentar estos niños aplicar las operaciones según el algoritmo tradicional, se observa que el número de errores aumenta considerablemente, debido probablemente a que el algoritmo no reflejaba su forma natural de operar.

Posteriormente en los noventa surge un movimiento más radical que afirma que los algoritmos son negativos para el desarrollo del cálculo en los niños, ya que cuando aprenden las reglas para ejecutarlos se olvidan de su propio conocimiento numérico.

Estas ideas llevaron a algunos investigadores a pensar que los algoritmos más que una ayuda podían suponer un impedimento para el cálculo en los niños.

En este capítulo comenzaremos definiendo lo que es un algoritmo y sus propiedades, después se evalúan los algoritmos inventados, se proponen algunos alternativos, y se analizan los errores típicos infantiles. Finalmente, se estudia la enseñanza-aprendizaje de los algoritmos tradicionales.

9.2. DEFINICIÓN DE ALGORITMO

Desde el punto de vista matemático se puede definir el algoritmo como un «método sistemático para resolver operaciones numéricas, que consta de un conjunto finito de pasos guiados por unas reglas que nos permiten economizar el cálculo y llegar a un resultado exacto. Para manejar estos algoritmos es indispensable que previamente el niño maneje la operación mentalmente, así como el sistema de numeración decimal.

Los algoritmos tienen tres propiedades básicas:

- a) **Son específicos:** es decir, cada algoritmo tiene unas reglas específicas que guían nuestras acciones para llegar a un resultado acorde con la operación planteada.

- b) **Generalidad:** esto quiere decir que problemas de la misma naturaleza pueden resolverse con el mismo algoritmo.
- c) **Resultabilidad:** aluden a que el algoritmo siempre converge en un resultado o solución al problema planteado.

Por lo tanto, para realizar operaciones disponemos de un instrumento rápido, eficaz y económico.

9.3. EVALUACIÓN DE LOS ALGORITMOS INVENTADOS

El enfoque constructivista insiste en que la adquisición de conocimiento supone la ejecución de una serie de acciones mentales que permitan establecer relaciones entre los conceptos ya poseídos. Por ello, no basta que el adulto muestre al niño como se utiliza, por ejemplo, el algoritmo de la multiplicación, sino que no habrá realmente comprensión del mismo por parte del niño hasta que éste se lo apropie y lo «invente», relacionándolo con sus propios algoritmos y con los algoritmos de sus compañeros.

Ahora bien, cuando los niños desarrollan sus propios procedimientos, la forma natural de proceder es de izquierda a derecha. Por ello, al presentarles los algoritmos tradicionales, en los cuales se opera de derecha a izquierda (exceptuando la división), se encuentran con una situación que sólo pueden manejar subsumiendo su forma de proceder a la forma que se les enseña, lo que frecuentemente lleva su tiempo y produce no pocos errores. Efectivamente, en el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 32 \\ +29 \end{array}$$

se procede de la forma siguiente: 9 más 2 son 11, me llevo 1; 3 más 2 son 5, más 1 son 6. En este procedimiento encontramos dos problemas: el de las llevadas y el de sumar 3 más 2 en lugar de 30 más 20. Además, este tipo de algoritmos hacen que los niños dejen de lado su forma natural de proceder,

ignoren el valor de la posición del número y que cometan errores cuando se les olvida anotar lo que se «llevan».

Sin embargo, esto no quiere decir que los algoritmos tradicionales no sean útiles, sobre todo cuando hay que operar con cantidades grandes y se hace necesario el uso del lápiz y el papel. Además, es bueno que los niños conozcan más de un algoritmo para una misma operación, de modo que puedan elegir según las cantidades implicadas, el tiempo disponible, etc.

Ahora bien, cuando los alumnos desarrollan sus propios procedimientos de cálculo, debemos tener presente algunas pautas para poder evaluar cuáles son útiles y válidos, y cuales no lo son. En este sentido, los algoritmos infantiles deberían cumplir las siguientes condiciones:

- 1) Deben ser eficientes.
- 2) Deben ser matemáticamente válidos.
- 3) Deben ser generalizables a problemas distintos de los que surgieron.

Veamos más en detalle cada una de estas condiciones:

9.3.1. Eficientes

Al principio es normal y recomendable que los niños operen utilizando dibujos, objetos, etc. Sin embargo, con números grandes este procedimiento no es eficiente. En estos casos, el profesor debe ayudar al estudiante a descubrir caminos más rápidos de notación, instándole a que explique cómo ha resuelto un problema concreto y que intente representar la solución de otra forma, por ejemplo usando números, tal como hace el niño ante el problema: (11 caramelos repartidos entre 3 niños): «uno para el primero, otro para el segundo... tocan a tres cada uno y quedan dos» (ver [Fig. 9.1](#)).

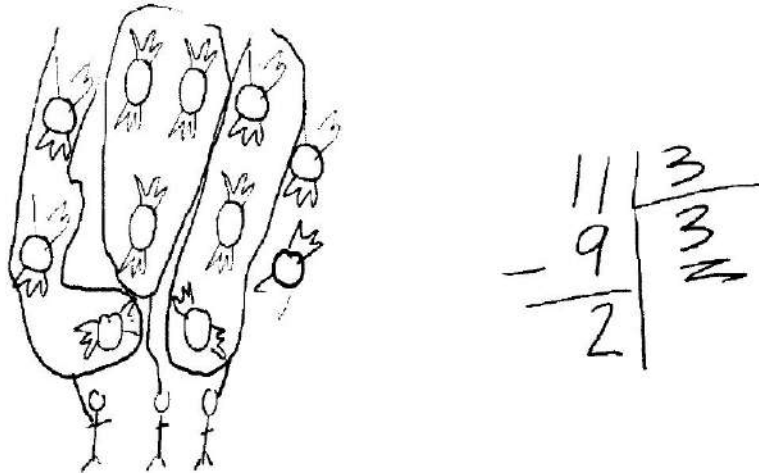
9.3.2. Procedimientos matemáticamente válidos

Esta condición requiere que el procedimiento no demande un exceso de trabajo mental para aplicar cada paso. Veamos dos procedimientos

inventados por los niños que cumplen al menos el primer criterio. ¿Son también matemáticamente válidos?

FIGURA 9.1

DOBLE REPRESENTACIÓN DE LA DIVISIÓN



Ejemplo 1º:

$$\begin{array}{r} 57 \\ -38 \\ \hline \end{array}$$

«Tengo 50, le quito 30 y me quedan 20. Luego tengo 7 y 8. 7 menos 8... debo 1. La quito al 20 y me quedan 19».

En este procedimiento vemos que el niño empieza de izquierda a derecha y resta el número más pequeño del más grande (fijémonos en las unidades). Lo que de hecho parece hacer es utilizar de forma sistemática los bloques de base 10. Primero procede con las decenas y luego averigua la diferencia en las unidades. El procedimiento es matemáticamente válido (ver [Fig. 9.2](#)).

FIGURA 9.2

ALGORITMO DE RESTA INVENTADO

$$\begin{array}{r}
 57 \\
 - 38 \\
 \hline
 20 \\
 - 1 \\
 \hline
 19
 \end{array}$$

FIGURA 9.3

ALGORITMO DE DIVISIÓN INVENTADO

$$\begin{array}{r}
 146 \\
 \div 5 \\
 \hline
 1 \text{ } 1/5 \\
 8 \\
 20 \\
 \hline
 29 \text{ } 1/5
 \end{array}$$

Ejemplo 2º:

$$146/5$$

«6 entre 5 son 1 y $1/5$. 40 entre 5 son 8. 100 entre 5 son 20. $1\ 1/5 + 8 + 20 = 29\ y\ 1/5$ » (ver [fig. 9.3](#)).

De nuevo podemos observar en este ejemplo que se invierte el orden de ejecución convencional, ya que se inicia la división por las unidades. Se trata de un método matemáticamente válido, pero es un procedimiento poco eficiente, ya que se tarda bastante tiempo en averiguar cada cociente parcial y supone un trabajo previo de cálculo mental.

9.3.3. Generalizable

Ilustremos el cumplimiento de esta condición utilizando los mismos procedimientos recogidos en el apartado anterior, aunque en este caso lo haremos con números mayores.

Ejemplo 1º:

$$\begin{array}{r} 543 \\ -278 \\ \hline \end{array}$$

«500 menos 200 son 300. 40 menos 70, debo 30. 3 menos 8, debo 5: $300 - 30 = 270$; $270 - 5 = 265$ ».

En esta ocasión, con números mayores de 99, el procedimiento se hace largo; sin embargo, se puede utilizar sin mayores dificultades (ver [Fig. 9.4](#)).

Ejemplo 2º:

$$346/12$$

«6 entre 12 son $6/12$. 40 entre 12 son 3 y $4/12$. 300 entre 12... si 12 por 10 son 120 y por 20 son 240, faltan 60, que es por 5, luego son 25. Sumo $6/12 + 3\ 4/12 + 25 = 28\ y\ 10/12$ » (ver [Fig. 9.5](#)).

FIGURA 9.4

EJEMPLO DE PROCEDIMIENTO DE RESTA

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 \text{300} \leftarrow 543 \\
 \text{30} \leftarrow 278
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 543 \\
 - 278 \\
 \hline
 300 \\
 - 30 \\
 \hline
 270 \\
 - 5 \\
 \hline
 265
 \end{array}
 \end{array}$$

FIGURA 9.5

EJEMPLO DE DIVISIÓN

$$\begin{array}{r}
 346 \\
 \div 12 \\
 \hline
 \begin{array}{l}
 6/12 \\
 34/12 \\
 + 25 \\
 \hline
 287^{10}/12
 \end{array}
 \end{array}$$

Este algoritmo tiene una limitación respecto a su generabilidad, ya que existe una gran dificultad para encontrar la fracción de los cocientes parciales. Además, cuando el alumno se enfrente a la división con números decimales, este procedimiento resultará demasiado complejo. Por lo tanto, se

trata de un método que pierde eficiencia con números altos y con números no redondos, siendo difícil su ejecución correcta con números decimales.

Ahora bien, cuando un algoritmo no cumple alguno de estos criterios, no sería acertado por parte del profesor decir al alumno que su algoritmo no vale y que debe utilizar el tradicional. Sería más adecuado que, bajo la orientación del profesor, los mismos niños debatan estos criterios de evaluación aplicados a sus creaciones, para que comprueben hasta qué punto cumplen las condiciones y decidan el método que resulta más comprensible para su uso personal.

9.4. ALGORITMOS ALTERNATIVOS PARA LAS CUATRO OPERACIONES BÁSICAS

Veamos ahora algunos algoritmos alternativos para las cuatro operaciones básicas que aparecen frecuentemente como procedimientos inventados por los alumnos. Ello permite presentarlos como alternativas poderosas al algoritmo tradicional, ya que respetan el pensamiento numérico peculiar del niño.

9.4.1. La suma

El procedimiento clásico de enseñar a sumar y restar en clase consiste en una aproximación gradual a operaciones cada vez más difíciles. De modo general, esta aproximación se realiza de la siguiente forma:

- Operaciones de un solo dígito en dirección vertical y sin que se supere la decena.
- Un solo dígito con llevadas, superando la decena.
- Operaciones multidígitos sin llevadas.
- Operaciones multidígitos con llevadas.

En las operaciones multidígitos sin llevadas es indistinto comenzar la operación por la izquierda o por la derecha, aunque generalmente se enseña a los alumnos a empezar por la derecha, a fin de evitar problemas ante

operaciones con llevadas. Sin embargo, como ya comentamos antes, la forma natural del niño es de izquierda a derecha, de modo que si el profesor no está supervisando, los niños suelen realizar la operación en esta dirección, lo que les conduce a una etapa de confusión cuando se enfrentan a las llevadas.

En cualquier caso, para operaciones con más de dos dígitos y con llevadas proponemos el siguiente tipo de procedimiento alternativo:

Procedimiento de sumas parciales

Consiste en realizar tantas sumas parciales como columnas haya, empezando por la izquierda. Una vez terminada la suma de las unidades, se lleva a cabo la suma total de las sumas parciales encontrando de este modo el resultado final (ver [Fig. 9.6](#)).

Este método resulta interesante al menos por dos razones:

- 1) Evita los procedimientos complejos de «llevarse» que frecuentemente conducen a errores de olvido de anotación.
- 2) Es un método que resalta el valor de la posición del número, ya que el alumno no trabaja con las distintas columnas como si fueran conjuntos de unidades.

Por otra parte, según los criterios de validez que planteamos para la evaluación de los algoritmos, nos encontramos ante una alternativa efectiva, generalizable y matemáticamente válida.

Ahora bien, si queremos fomentar la rapidez en la realización de la suma, podemos iniciar la introducción del algoritmo tradicional para números de varias cifras. Una vez que los alumnos dominan el método de sumas parciales, se les sugiere una nueva forma de registrar las operaciones para ahorrarnos todas las sumas parciales. Una puesta en común en la clase sobre esta cuestión puede hacer que a estas alturas surja el algoritmo tradicional, en el que se utilizan las llevadas, tal como se ilustra en la [Figura 9.7](#).

FIGURA 9.6

PROCEDIMIENTO DE SUMAS PARCIALES

$$\begin{array}{r} 2387 \\ + 1535 \\ \hline 3000 \\ 800 \\ 110 \\ + 12 \\ \hline 3922 \end{array}$$

FIGURA 9.7

HACIA EL ALGORITMO TRADICIONAL

$$\begin{array}{r} 12387 \\ + 31535 \\ \hline 43922 \end{array}$$

9.4.2. La resta

Generalmente, la enseñanza de la sustracción se lleva a cabo después de la enseñanza de la adicción: ¿esto significa que la resta resulta más compleja que la suma a los niños? Si nos fijamos en las actividades que los niños

realizan cotidianamente antes de ser escolarizados, tales como «regalar», «dar», «quitar»...caramelos, lápices, etc., veremos que llevan a cabo sumas y restas de cantidades pequeñas a la misma edad. Por tanto, la enseñanza de ambas operaciones debería simultanearse en el desarrollo matemático infantil. Sin embargo, el algoritmo tradicional de la resta plantea no pocos problemas a los niños, por lo que conviene usar al principio algoritmos alternativos. Veamos a continuación algunos de ellos.

Método de «añadir a»

Se trata de un método que los niños desarrollan en algunas ocasiones y parece reflejar la forma de calcular mentalmente «las vueltas» que nos debe dar el tendero cuando hacemos la compra.

Por ejemplo: ante $42 - 37$, podemos preguntarnos ¿qué distancia hay entre el 42 y el 37?, o ¿qué tengo que sumarle a 37 para llegar a 42? Este modo de operar puede ser registrado de varias formas: añadiendo al número más pequeño cantidades sucesivas de números hasta llegar al número-meta (1), o bien redondeando las cantidades (2) (ver [Fig. 9.8](#)).

FIGURA 9.8

ALGORITMOS ALTERNATIVOS DE RESTAR

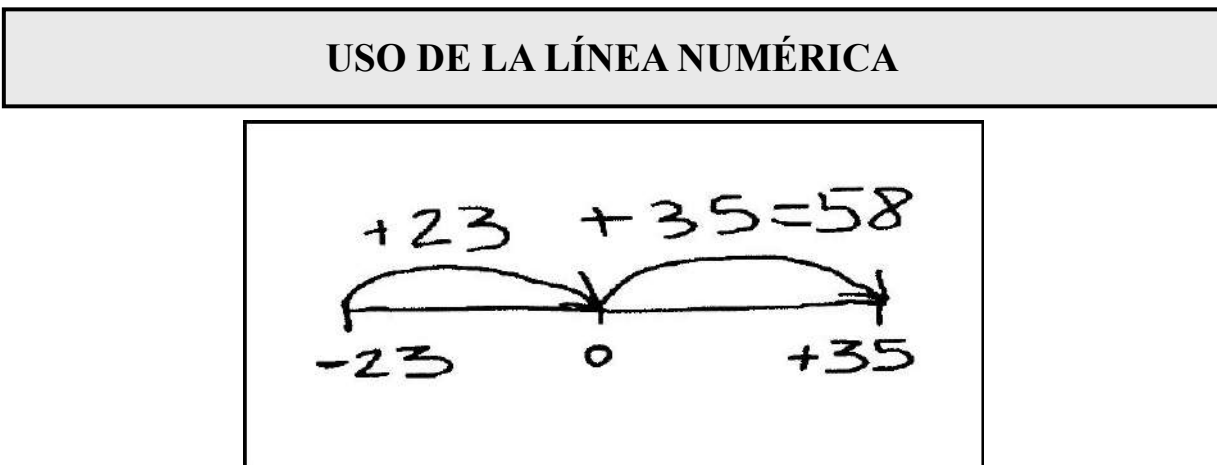
$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{array}{r} 42 \\ - 37 \\ \hline 37 + \textcircled{5} = 42 \end{array} \\
 2) \quad \begin{array}{r} 126 - 69 = 69 + 1 \\ \quad \quad \quad 70 + 30 \\ \quad \quad \quad 100 + 26 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 57 \end{array}
 \end{array}$$

Este algoritmo tiene varios puntos fuertes:

- a) Se construye dentro del sentido de la línea numérica del niño (qué tengo que añadir a 89 para que sea 100, en lugar de quitar 89 a 100).
- b) Refleja que la resta supone la comparación de dos números, lo que facilitaría la comprensión de los problemas de comparación que tantas dificultades provocan a los escolares (Juan tiene 10 caramelos y Pedro tiene 18. ¿Cuántos caramelos tiene Pedro más que Juan?).

Además, esta última ventaja puede aprovecharse más adelante para explicar las operaciones con números negativos. Así, por ejemplo: $35 - (-23)$. En este caso el alumno puede preguntarse ¿qué debo añadir a -23 para llegar a 0? ¿Cuánto le añado al 0 para tener 35? (ver Fig. 9.9). De esta forma su ejecución no depende del recuerdo o no de la regla que guía este tipo de operaciones.

FIGURA 9.9



Método de las «diferencias parciales»

Este método es similar al propuesto en el apartado de la suma. Al igual que en las «sumas parciales», se comienza a operar de izquierda a derecha. Si en alguna columna el substraendo tiene un dígito mayor que el minuendo, se

representará la diferencia con un «menos» delante, indicando de esta forma que «debemos» esa cantidad (ver Fig. 9.10).

FIGURA 9.10

MÉTODO DE DIFERENCIAS PARCIALES

$$\begin{array}{r}
 720 \\
 - 573 \\
 \hline
 700 - 500 = 200 \\
 20 - 70 = -50 \\
 0 - 3 = -3 \\
 \hline
 200 - 50 = 150 \\
 150 - 3 = \underline{\underline{147}}
 \end{array}$$

Puede parecer complicado utilizar números negativos en los primeros cursos, pero muchos alumnos los utilizan en operaciones de baja dificultad. No se trata de que comprendan los números negativos. En este caso les basta entender que poner un menos delante del número significa que deben esa cantidad y que tienen que sacarla de los demás números.

9.4.3. La multiplicación

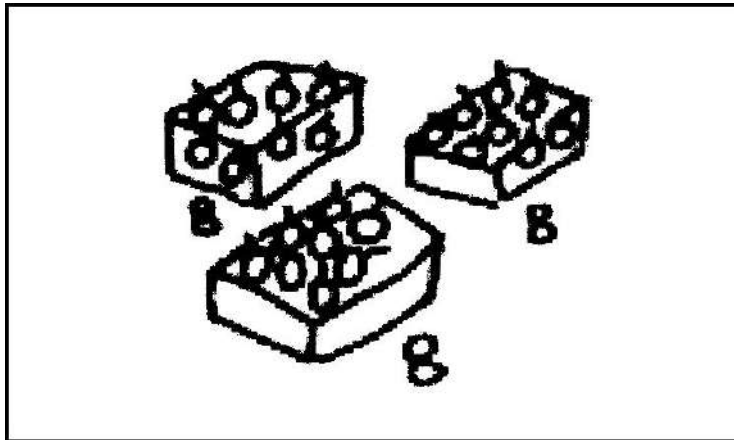
Antes de llegar al algoritmo convencional de la multiplicación, el niño construye algoritmos no convencionales para resolver problemas multiplicativos. Inicialmente utilizan material concreto que van sustituyendo progresivamente por lápiz y papel.

Modelado directo

En esta estrategia, el niño utiliza el conteo y el dibujo para resolver problemas. Inicialmente utilizará el modelado directo de «unos», para más tarde aplicar el modelado de diez. En el primer caso, el niño puede utilizar diferentes dibujos representando de uno en uno el multiplicando las veces que plantee el multiplicador. Por ejemplo: «Pedro tiene 3 cajas de peras y cada caja tiene 8 peras. ¿Cuántas peras tiene en total?». El niño cuenta señalando y resuelve el problema contando de uno en uno (ver [Fig. 9.11](#)).

FIGURA 9.11

EJEMPLO DE MODELADO DIRECTO



Cuando utiliza el modelado con 10, resuelve la operación tomando grupos de 10 y completándolos con unidades hasta formar el número multiplicando. Después se repite este paso cuantas veces indique el multiplicador. Finalmente el niño cuenta los grupos de 10 añadiendo las unidades al final. Ver, por ejemplo, 28×5 en la [Fig. 9.12](#).

FIGURA 9.12

MODELADO DIRECTO EN GRUPOS DE DIEZ

10	10	1	1	1	1	1	1	1
////////	////////	/	/	/	/	/	/	/
////////	////////	/	/	/	/	/	/	/
////////	////////	/	/	/	/	/	/	/
////////	////////	/	/	/	/	/	/	/
////////	////////	/	/	/	/	/	/	/

Método de «sumas repetidas»

Este procedimiento es similar al anterior, pero ahora el niño emplea números para representar las cantidades y utiliza el algoritmo de la suma. Es especialmente útil antes de aprender las tablas de multiplicar y con números pequeños, puesto que cuando hay que operar con números grandes (más de dos dígitos en cada término) se vuelve engorroso (ver [Fig. 9.13](#)). Además, facilita en gran manera el entendimiento de la multiplicación a partir de la suma..

FIGURA 9.13

MODELO DE SUMAS REPETIDAS

$$9 \times 5 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9$$

$$\Downarrow$$

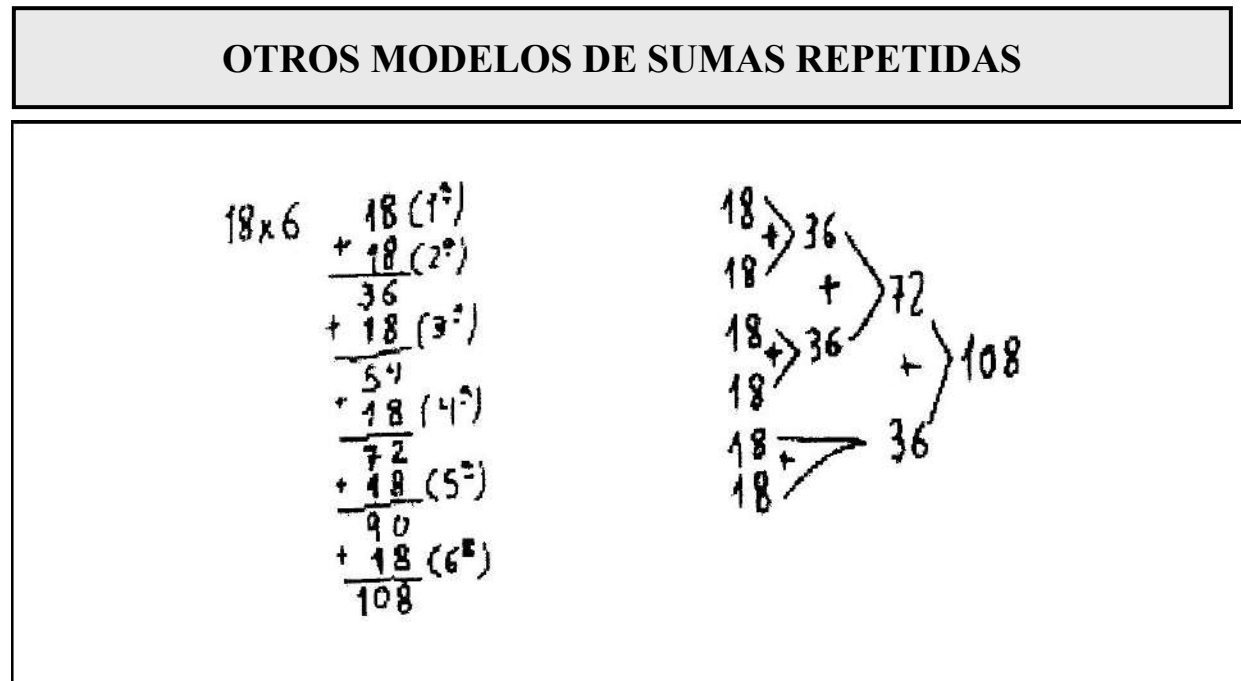
$$45$$

Por otra parte, existen varias versiones de esta estrategia. Por ejemplo, el niño puede ir haciendo sumas parciales del multiplicador para agrupar los números en menos grupos, como ocurre por ejemplo con el método siguiente.

«Completar números»

Ante el problema: «Si Nicolás tiene 18 cajas de bombones y cada caja tiene 6 bombones, ¿cuántos bombones tiene en total?», el niño puede seguir cualquiera de las dos formas recogidas en la [Figura 9.14](#).

FIGURA 9.14



Método de productos parciales

En esta estrategia el niño puede empezar a operar por la izquierda o por la derecha del algoritmo. Esta alternativa enfatiza el valor de la posición del número y además evita las llevadas hasta el final (ver [Fig. 9.15](#)).

FIGURA 9.15

MODELO DE PRODUCTOS PARCIALES

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 13 \\
 \hline
 105 \\
 350 \\
 \hline
 455
 \end{array}$$

Método de «partición del número»

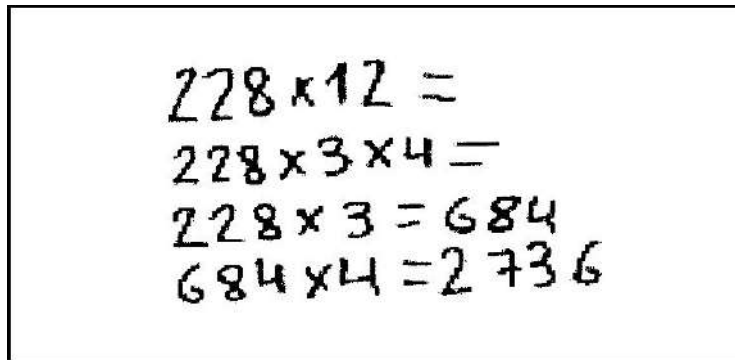
En este algoritmo los niños «parten» el multiplicando, el multiplicador o ambos en números para facilitar el cálculo. Estas particiones pueden hacerse siguiendo una estructura decimal o cualquier otro criterio de partición.

Un ejemplo de partición en estructura no decimal sería el siguiente ejemplo: 228×12 .

«Sé que 3×4 son 12; entonces multiplico cada uno de estos números por el más grande y así tendré el resultado» (ver [Fig. 9.16](#)).

FIGURA 9.16

MODELO DE PARTICIÓN DEL NÚMERO



Handwritten calculations showing the steps of the lattice method for 228×12 :

$$228 \times 12 =$$

$$228 \times 3 \times 4 =$$

$$228 \times 3 = 684$$

$$684 \times 4 = 2736$$

Algoritmo de la rejilla

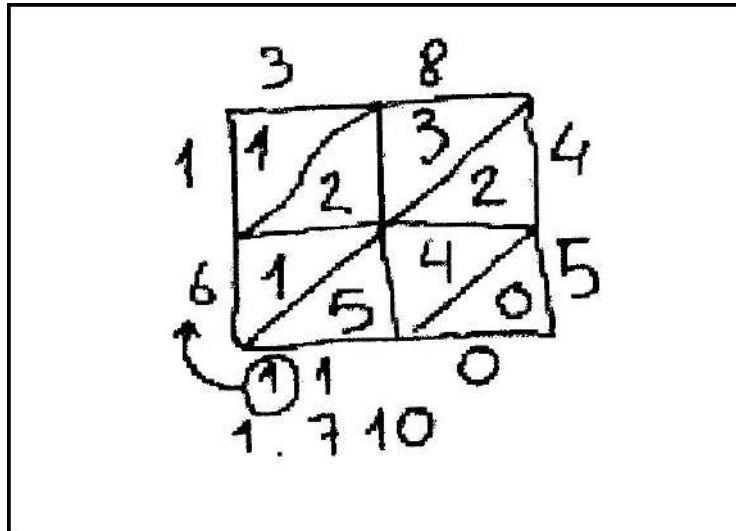
Para terminar este apartado, proponemos un algoritmo que parece ser que data del siglo X y fue muy popular durante los siglos XIV y XV en Europa. Se trata de un algoritmo de fácil utilización, evita las llevadas hasta el final del proceso, pero tiene el inconveniente de ignorar el valor de la posición del número. Para emplearlo, se dibuja una rejilla con tantas celdillas como cifras tengan los números. Cada celdilla se divide con una diagonal por la mitad. Se coloca el multiplicando en la parte superior de la rejilla y el multiplicador a la derecha de la misma (ver [Fig. 9.17](#)). Después se empieza a multiplicar cada cifra, colocando las decenas en la parte superior de las celdillas y las unidades en la inferior. Finalmente, se suman los contenidos de las celdillas en diagonal, tal como aparece en la [Figura 9.17](#). Veamos el ejemplo: 38×45 .

9.4.4. La división

El algoritmo tradicional de la división presenta ciertas peculiaridades con respecto al resto de algoritmos estudiados. Por una parte, se opera de izquierda a derecha (y no de derecha a izquierda), el resultado son dos números (cociente y resto), y además requiere el uso de las operaciones anteriores (suma, resta y multiplicación). Estas características pueden hacer un poco más complicado el uso correcto del mismo.

FIGURA 9.17

ALGORITMO DE REJILLAS



Sin embargo, existen algoritmos alternativos en los que sólo se requiere el uso de la suma y la resta.

Método de «restas repetidas»

Este algoritmo consiste en restar el divisor al dividendo las veces que sea posible. El niño irá restando hasta llegar a un número más pequeño que el divisor, y contará las veces que ha restado (ver [Fig. 9.18](#)).

FIGURA 9.18

MODELO DE RESTAS REPETIDAS

$28:3=9$	$19-(3)=16$
$28-(3)=25$	$16-(3)=13$
$25-(3)=22$	$13-(3)=10$
$22-(3)=19$	$10-(3)=7$
	$7-(3)=4$
	$4-(3)=1$

Aproximaciones sucesivas

Este algoritmo es similar al tradicional, pero mucho más flexible, ya que el alumno tiene libertad para elegir el número que quiere multiplicar al divisor, avanzando por aproximación. En función de esta elección, el número de pasos realizados será distinto, y depende del conocimiento por parte del niño de los hechos numéricos. Veamos dos ejemplos en la [Figura 9.19](#).

FIGURA 9.19

MODELO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

728	8	$8 \times 9 = 72$
-720	90	$8 \times 90 = 720$
$\hline 8$	1	
-8	$\hline 91$	
$\hline 705$		

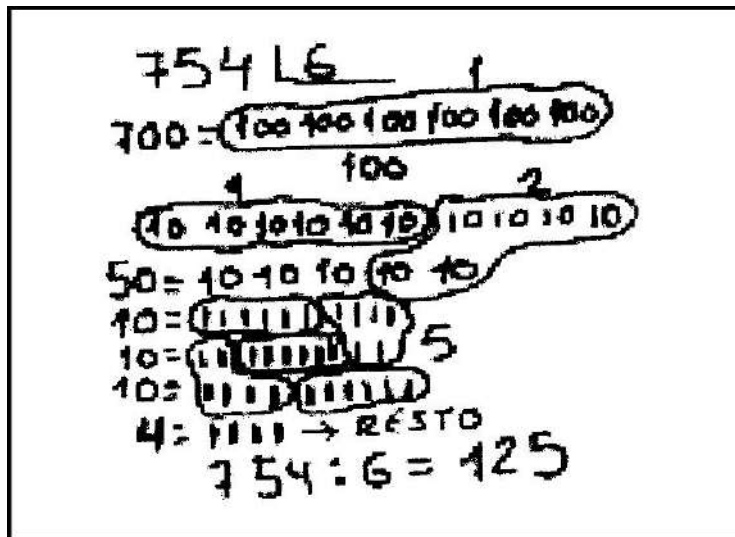
728	8	$8 \times 5 = 40$
-400	50	$8 \times 50 = 400$
$\hline 328$	40	$8 \times 4 = 32$
-320	$+1$	$8 \times 40 = 320$
$\hline 8$	$\hline 91$	
-8		
$\hline 705$		

Método de descomposición del dividendo

Se descompone el dividendo en unidades, decenas, centenas, etc., según el valor del número y los conocimientos infantiles. Después se agrupan las partes según el número que indique el divisor y se termina contando los grupos formados (ver Fig. 9.20).

FIGURA 9.20

MODELO DE DESCOMPOSICIÓN DEL DIVIDENDO



Este algoritmo puede ser utilizado desde cursos tempranos ya que sólo requiere la habilidad de agrupar en bloques de base diez y sumar.

9.5. ERRORES EN LOS ALGORITMOS

Aunque el niño resuelva al pie de la letra los pasos de un algoritmo, ello no implica que comprenda siempre lo que hace. Y esta es una de las principales causas de los errores cometidos por los niños.

Para evitar estas situaciones conviene tener presente dos cosas importantes. Por una parte, el conocimiento informal y previo de los alumnos juega un papel decisivo en el aprendizaje infantil, de modo que debe constituir el punto de partida en la construcción de nuevos conocimientos y en la adquisición de los nuevos algoritmos. Por otra, el profesorado debe conocer el nivel evolutivo de los alumnos para ajustar adecuadamente su enseñanza a este nivel, respetando de este modo el proceso natural de aprendizaje del niño. Además, conviene que el alumno corrija sus propios errores, ya que como dice Piaget: «Un error corregido por el mismo alumno puede ser más fecundo que un éxito inmediato, ya que la comprobación de una hipótesis falsa y sus consecuencias provee nuevos conocimientos».

A continuación exponemos algunos de los errores infantiles más representativos:

- 1. Errores en el valor de la posición del número.**
- 2. Errores en los pasos algorítmicos (por cambio u omisión).**
- 3. Errores de cálculo.**
- 1. Errores de posición:** Estos errores son típicos en los niños que no comprenden bien el valor de la posición del número. Así, el niño sitúa de forma incorrecta los números en las columnas, sumando, restando, multiplicando o dividiendo cifras con valores distintos. Veamos un ejemplo para las cuatro operaciones en la [Figura 9.21](#).

FIGURA 9.21

EJEMPLOS DE ERRORES EN EL VALOR DEL LUGAR
--

Handwritten arithmetic problems showing common errors:

- Addition:
$$\begin{array}{r} 534 \\ + 6 \\ \hline 594 \end{array}$$
- Multiplication:
$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 12 \\ \hline 92 \\ + 46 \\ \hline 138 \end{array}$$
- Subtraction:
$$\begin{array}{r} 542 \\ - 37 \\ \hline 172 \end{array}$$
- Division:
$$\begin{array}{r} 670 \overline{) 15} \\ \underline{-5} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 2 \end{array}$$

2. Errores en los pasos del algoritmo: En este caso, los alumnos pueden cambiar u omitir algunos de los pasos del algoritmo.

— *Omisión de alguno de los pasos:* como no realizar las llevadas, o no sumar los productos parciales en la multiplicación (ver [Fig. 9.22](#)).

FIGURA 9.22

ERRORES TÍPICOS				
$\begin{array}{r} 752 \\ \times 63 \\ \hline 3156 \\ 4502 \\ \hline 48.176 \end{array}$	$\begin{array}{r} 46 \\ \times 15 \\ \hline 230 \\ + 46 \\ \hline 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} 78 \\ + 26 \\ \hline 94 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1230 \overline{) 3} \\ \underline{-12} \\ 003 \\ \underline{-3} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 674 \\ - 36 \\ \hline 642 \end{array}$

— *Cambio de unos pasos por otros inventados o de otra operación:* en la suma el niño opera con el cero como si

estuviera multiplicando, mientras que en la resta suma las primeras cifras (ver Fig. 9.23).

FIGURA 9.23

ERRORES TÍPICOS	
$\begin{array}{r} 80 \\ +56 \\ \hline 130 \end{array}$	$\begin{array}{r} 52 \\ -37 \\ \hline 29 \end{array}$

3. **Errores de cálculo:** nos referimos a aquellos errores relacionados con los fallos numéricos al operar con las cantidades.

9.6. ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ALGORITMO TRADICIONAL

Antes de iniciar la escolaridad, el niño es capaz de realizar cálculos sencillos sin necesidad de utilizar los algoritmos tradicionales. Cuando en los primeros cursos se les impone su uso, se produce una ruptura con su forma natural de calcular, lo que provoca que cometan errores ante operaciones que ellos saben resolver con sus propios procedimientos. Por ello, parece recomendable «aparcarse» la enseñanza del algoritmo tradicional como forma prioritaria de cálculo, siendo preferible iniciar estos aprendizajes empleando las estrategias propias de los alumnos, permitiendo la reflexión colectiva sobre cada una de estas estrategias, evaluando su utilidad, para poco a poco ir introduciendo formas más abstractas, sistemáticas y económicas de cálculo.

Para introducir adecuadamente la enseñanza de los algoritmos es necesario un trabajo previo de aprendizaje del sistema de numeración decimal, del cálculo mental y del cálculo por aproximación. El aprendizaje del sistema de numeración decimal implica diferentes etapas (Maza Gómez, 1991):

1. En la primera etapa, el niño comprende el nombre dado a un número como un conjunto, que ocupa una determinada posición en la secuencia numérica, pero sin tener en cuenta la relación entre los números. Por ejemplo: el número siete es un conjunto de elementos, una totalidad que no puede descomponerse.
2. En la segunda etapa, el niño es capaz de diferenciar cada dígito, pero sin entender el valor posicional de cada uno. Por ejemplo: el número 12 está formado por un 1 y un 2.
3. En la tercera etapa el niño empieza a entender que cada dígito tiene un valor. Por ejemplo: en el número 12, el 1 es una decena y el 2 dos unidades. Sin embargo, este reconocimiento es rígido ya que el niño se limitará a este tipo de particiones.
4. En esta fase se pasa del conocimiento rígido del valor posicional a un conocimiento más flexible donde una misma cifra puede ser representada de varias formas. Así, se realizan particiones múltiples del número, como por ejemplo: $35 = 30 + 5 = 10 + 20 + 5 = 10 + 10 + 10 + 5$.
5. Esta quinta etapa supone la aplicación del conocimiento de la descomposición múltiple del número al cálculo con algoritmos mediante la llevada.

Esta secuencia de etapas en el desarrollo infantil señala el camino a seguir en la enseñanza del algoritmo. Así, una **secuencia instruccional** que podría resultar adecuada para este objetivo sería aquella que incluyera:

- La enseñanza de la **secuencia numérica**.
- Más tarde se realizarían **ejercicios de agrupamiento**: primero con materiales que dejen clara la acción de agrupar (cubos, lapiceros, caramelos...), y luego con otros como el ábaco o las monedas, que

nos permiten hacer cambios de varias piezas pequeñas por otra de mayor valor.

- Introducir de forma simultánea el **cálculo por aproximación**, que puede servirnos para que el niño vaya aprendiendo y memorizando determinados hechos numéricos sencillos. Por ejemplo:

$$9 + 1 = 10$$

$$10 + 10 = 20$$

$$11 + 9 = 20$$

- El **cálculo mental** se puede utilizar para resolver esos hechos numéricos que ejecutados de forma algorítmica requeriría mayor esfuerzo. No tiene mucho sentido presentar la suma de $10 + 10$ de forma vertical, ya que resultaría más costoso que el cálculo mental.
- Todos aquellos ejercicios de **descomposición de números** constituyen una base previa para que el niño se enfrente al algoritmo escrito con más seguridad. Por ejemplo: descomponer de varias formas el número 46:

$$46 = 10 + 20 + 10 + 5 + 1$$

$$46 = 10 + 10 + 10 + 10 + 6$$

$$46 = 20 + 20 + 6$$

Por otra parte, algunos autores han propuesto programas de instrucción para facilitar la comprensión del algoritmo. Así, por ejemplo, Resnick y Omanson (1987), utilizan materiales concretos para ayudar a los niños a la comprensión del algoritmo de la resta, alegando que los algoritmos pertenecen a un nivel excesivamente abstracto, mientras que los niños tienen básicamente un pensamiento concreto. Para ello, diseñan un método de instrucción llamado «instrucción de emparejamiento» consistente en realizar tareas de sustracción utilizando bloques y por escrito de forma simultánea, es decir, se emparejan la manipulación y los símbolos escritos. De esta forma el niño puede interpretar los pasos que da por escrito como si fueran pasos y representaciones del procedimiento seguido con los bloques. El procedimiento instruccional consistía:

- Se presenta una cuenta de restar en su forma clásica (de forma vertical) y se proporciona un conjunto de bloques variados, pidiendo al niño que represente el minuendo mediante los bloques.

- Después leerá el número que hace de sustraendo y se le pedirá que quite esta cantidad de los bloques.
- Si el niño tiene que descomponer centenas en decenas o decenas en unidades, debe anotar estos cambios en la cuenta escrita.

La instrucción propiamente dicha consta de tres partes:

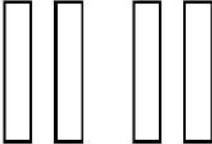
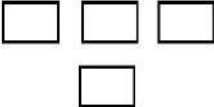
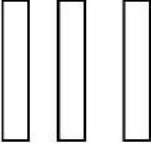
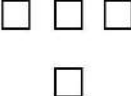
- a) El niño aprende la representación con los bloques del procedimiento de restar, de modo que empieza manipulando bloques y luego va anotando los cambios realizados.
- b) Después indica bien con manipulación directa o bien verbalmente cómo mover los bloques, escribiendo a continuación el resultado.
- c) Finalmente resuelve operaciones de restar sólo por escrito, pidiéndole que piense en los bloques durante la resolución de la tarea.

Por su parte, Fuson (1992) presenta un programa de instrucción para facilitar la comprensión de los símbolos y algoritmos aritméticos usando igualmente objetos concretos (ver [Fig. 9.24](#)).

$$\begin{array}{r} 1343 \\ -434 \\ \hline \end{array}$$

FIGURA 9.24

REPRESENTACIÓN DEL ALGORITMO

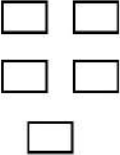
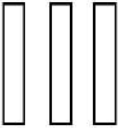
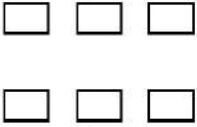
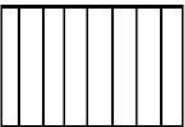
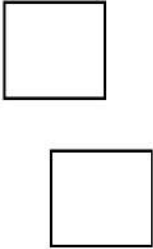
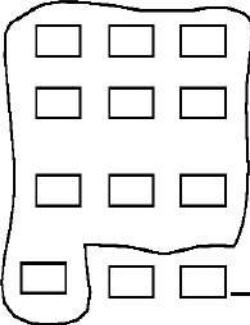
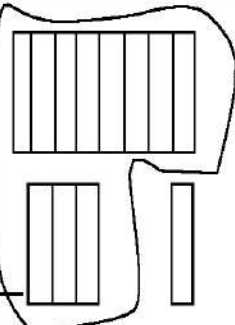
Millares	Centenas	Decenas	Unidades
1 	3 	4 	3 
	4 	3 	4 

Se utilizan tarjetas para escribir cada uno de los dígitos de los términos así como bloques de base 10. El programa de instrucción consta de las siguientes partes:

1. Uso de los bloques y su relación con los numerales. También se practicó el uso de las llevadas y se verbaliza la traducción de los bloques en números y viceversa.
2. Se presentan tareas aditivas y sustractivas, usando los bloques. Primero se practicó la adición.
 - El niño debía representar los dos términos con los bloques, empezando por el de arriba.
 - Posteriormente se lleva a cabo la adicción, empezando columna por columna desde la derecha.
 - En cada columna se juntaban todos los bloques en la parte inferior, de modo que si el número era 9 o menos, se anotaba tal cual. Si el número es mayor de 9, entonces se cambian 10 de las piezas pequeñas por una de las piezas mayores, anotando el resultado de este cambio.

- Se insiste en que sólo puede haber un dígito por columna (ver Fig. 9.25).

FIGURA 9.25

REPRESENTACIÓN DE LA SUMA				
Millares	Centenas	Decenas	Unidades	
				1.532 +
				681
				2.213

El método seguido para la sustracción fue similar, teniendo en cuenta las diferencias que existen entre las dos operaciones.

Los resultados fueron muy positivos, ya que, entre otras cosas, mostraron que los bloques eran un soporte muy útil para el pensamiento infantil, hasta el punto de que algunos errores eran autocorregidos diciendo solamente a los niños que pensarán en los bloques.

En cuanto a la enseñanza de los algoritmos de la multiplicación y de la división, remitimos al [capítulo 6](#).

9.7. BIBLIOGRAFÍA

- Baek, J. M. (1998). «Children's invented algorithms for multidigit multiplication problems». En Lorna Morrow y Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (151-160)*. Reston, VA: NCTM.
- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética*. Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V. (1996). «Enseñar a comprender las matemáticas». En J. Beltrán y C. Génovard (Eds.), *Psicología de la instrucción I. Variables y procesos básicos* (pp. 579-589). Madrid: Síntesis.
- Bermejo, V., Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C. y Lozano, M^a J. (2002). *PEI: Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Editorial Complutense.
- Carrol, W., Porter, D. (1998). «Alternative algorithms for whole-number operations». En Lorna Morrow y Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (106-114)*. Reston, VA: NCTM.
- Fuson, K. y cols. (1997). «Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction». *Journal for research in mathematics education*, 28, 130-162.
- Maza Gómez, C. (1991). *Sumar y restar*. Madrid: Visor.
- Kamii, C., Dominick, A. (1998). «The harmful effects of algorithms in grades 1-4». En Lorna Morrow y Margaret J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics (130-140)*. Reston, VA: NCTM.

10

Dificultades de aprendizaje en matemáticas

M. Blanco • V. Bermejo

10.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se ha tratado de la enseñanza-aprendizaje de determinados contenidos matemáticos a niños en general. Pero en la mayoría de las clases nos encontramos con algún niño o niña que tiene dificultades para aprender matemáticas al mismo ritmo o de la misma forma que el resto de sus compañeros, a pesar de mostrar una competencia adecuada en otras áreas escolares. En este caso hablamos de niños con «Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas» (DAM). Este capítulo se ocupa de este tipo de dificultades. Primero vamos a intentar contextualizar este déficit en un marco más amplio, tanto educativo como científico, para posteriormente aproximarnos a sus tipos y a los trastornos con los que van a aparecer asociados con mayor probabilidad. Concluiremos con algunas recomendaciones de cara a la intervención. Esperamos de esta forma aumentar la sensibilidad del contexto educativo y social frente a las olvidadas «Dificultades de Aprendizaje» (DA).

La LOGSE ha marcado la pauta de estos últimos años, ya que desde su aprobación en 1990 se empieza a emplear de forma generalizada el término de Necesidades Educativas Especiales. Esta ley recoge una tendencia iniciada en el Reino Unido con la «Ley de Educación» de 1981, en la que se dice que un alumno tiene necesidades educativas especiales cuando su dificultad de aprendizaje requiere una respuesta educativa especial, resaltando así la conveniencia de no centrar la valoración sólo en el alumno, sino ampliarla al contexto escolar. En la «Ley de Calidad de la Educación» (2002) se sigue hablando de «Necesidades Educativas», pero se añade ahora el calificativo de «Específicas».

En base a estas leyes y a la normativa derivada de ellas se han articulado dos programas fundamentales para atender a los alumnos que no pueden seguir el currículo ordinario: el de compensación educativa y el de educación especial. En el primer caso el origen de las dificultades del alumno es externo al propio individuo, es decir, el niño presenta dificultades escolares por encontrarse en situaciones de privación sociocultural, haber estado desescolarizado o no dominar la lengua o lenguas oficiales. En el segundo caso la causa es interna, pues el alumno presenta una discapacidad física, psíquica, sensorial o trastornos de personalidad, hablándose en este caso de alumnos con «Necesidades Educativas Especiales» (NEE). La administración educativa, por medio de los Equipos de Orientación Educativa y Psicopedagógica, es la responsable de la identificación del alumnado que requiera apoyos y medios complementarios. Estos servicios son externos al centro y están compuestos por profesionales de diferentes especialidades encargados de realizar la evaluación psicopedagógica, en la que se debe tener en cuenta tanto las condiciones y características del alumno como las de su entorno familiar y escolar.

Pero, ¿qué sucede cuando el niño sólo muestra dificultades en el área de matemáticas, es decir, cuando tiene Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas (DAM)? Algunos orientadores consideran que se les podría incluir dentro del grupo de niños con Necesidades Educativas Especiales, debido a:

- 1) Se trata de un déficit cuya causa es interna.
- 2) Según la teoría de las inteligencias múltiples, no es difícil admitir que un déficit en la «habilidad matemática» puede coexistir con

una ejecución normal o superior en otras habilidades, como pueden ser la «habilidad lingüística», la «habilidad viso-espacial» o la «habilidad motriz-cenestésica».

- 3) Los profesionales de los programas de educación especial (el profesor de Pedagogía Terapéutica y el de Audición y Lenguaje) están mejor preparados que el profesorado de los programas de Compensación Educativa para responder a las necesidades educativas de la mayoría de los niños con Dificultades Específicas de Aprendizaje.

Una vez determinada la NEE del alumno con DAM, el siguiente escollo a superar es el de la provisión de recursos. «La integración» empezó de forma experimental unos años después de la aprobación de la Ley de Integración Social de los Minusválidos (1982), de modo que los alumnos con algún tipo de discapacidad que antes estaban escolarizados en centros específicos eran escolarizados en centros ordinarios, a los que se les dotaba de recursos complementarios o extraordinarios (maestros de Pedagogía Terapéutica y de Audición y Lenguaje, Fisioterapeuta y Auxiliar Técnico Educativo). Hoy en día no tiene sentido hablar de colegios de integración, pues todas las escuelas sostenidas con fondos públicos deben admitir a alumnos discapacitados. A pesar de ello, en algunos entornos escolares se sigue hablando de «niños de integración» y se sigue considerando que los recursos «complementarios» son de uso exclusivo de «los niños de integración», lo que excluye a los niños con Dificultades de Aprendizaje, pues ellos nunca han estado en una enseñanza segregada. Además, la mayoría de las administraciones educativas no permiten computar a estos alumnos con el fin de establecer la provisión de recursos con los que debe contar cada escuela.

Por tanto, la legislación que regula la atención a la diversidad no impulsa ni el diagnóstico ni la adecuada atención de estos alumnos. Esta carencia de regulación puede deberse, en parte, a la falta de consenso entre los profesionales para definir qué son las Dificultades Específicas de Aprendizaje (DA).

10.2. DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

Algunos autores consideran que un alumno tiene DA cuando se han observado discrepancias entre su ejecución en las tareas escolares y su capacidad intelectual. Los defensores de este criterio diagnóstico parten de la asunción, no defendida por toda la comunidad científica, de que las pruebas de CI miden «potencial». Pero se ha podido comprobar que el rendimiento en las pruebas de CI se encuentra muy mediatizado por las habilidades académicas. Así, por ejemplo, es más probable que a los buenos lectores les guste la lectura, dediquen su tiempo libre a leer y de esta forma adquieran más vocabulario. Esta circunstancia repercutirá en su ejecución superior en la pruebas de CI que incorporen tareas de comparación o definición de palabras (Efecto Mathew), haciendo que la media del CI de los grupos de niños con Dificultades de Aprendizaje se separe de la de sus iguales sin dificultades, para algunos autores en al menos 6 puntos. Por esta razón, hay quien propone definir a los niños con DA sólo en base a su bajo rendimiento.

Cuando el niño no ha sido diagnosticado como alumno con «dificultades de aprendizaje» es probable que los padres y profesores le presionen para que muestre «más interés» en lo académico, alejándole de aquellas actividades que le gustan y que hacen que se sienta competente («el fútbol», «el grupo de teatro» o «las clases de dibujo»). De esta forma su vida cotidiana se llenará de actividades y situaciones que le provocan más y más ansiedad: clases particulares extraordinarias, hacer los «deberes» hasta muy tarde, no tener tiempo para jugar o escuchar los comentarios de preocupación de la familia. No es, por tanto, extraño que muchos de estos niños muestren signos de depresión o ansiedad, como pesadillas, dolor de estómago, miedos, etc. Esta situación afectiva también afecta a los resultados en las pruebas de CI o a la competencia curricular de otras áreas en las que en principio no presentaban problemas.

A pesar de esta falta de consenso, podemos afirmar que la mayoría de los investigadores están de acuerdo en que en el diagnóstico de DA se deben cumplir los siguientes tres criterios:

- 1º El alumno debe presentar un retraso «significativo» respecto a su grupo de iguales en la adquisición de determinados contenidos escolares (la lectura, la escritura, las matemáticas, etc.).
- 2º Su inteligencia debe ser normal (superior a 80-90), lo que no implica que deba haber discrepancia CI – rendimiento.

- 3º Las dificultades no se pueden justificar por la presencia de problemas emocionales graves, por un déficit físico o sensorial o por no haber recibido una adecuada escolarización (ver Bermejo y otros, 1997).

Por tanto, no se deben etiquetar como alumnos con DA a aquellos que simplemente son los más jóvenes de la clase o que proceden de situaciones sociales marginales o de otras culturas. Estos niños mal catalogados como «especiales» podrían llegar a ser tratados de forma distinta en el sistema educativo, recibiendo apoyo fuera del aula y contenidos de menor nivel. Si el niño se acomoda a este entorno menos exigente, el ligero retraso que presentaba al principio se irá haciendo cada vez mayor.

Cuando las DA se dan en el área de matemáticas, los psiquiatras suelen hablar de «trastornos del cálculo» (DSMIV-TR o CIE-10), los neurólogos infantiles de «discalculia» o «acalculia» y desde la psicología escolar de «Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas» (DAM). Preferimos el último término, porque las dificultades del alumno no sólo aparecen en el ámbito del cálculo, sino también en otros dominios matemáticos.

10.2.1. Dificultades de aprendizaje en matemáticas

Se estima que las dificultades en matemáticas tienen una presencia aproximada del 6 por ciento. Esto quiere decir que en la mayoría de nuestras aulas deberíamos descubrir uno o dos niños con dificultades, y sin embargo son pocos los niños detectados. Esto puede deberse a que en algunos casos el retraso no es destacable en los primeros años de escolaridad, en cambio en otros la presencia de más de un déficit distorsiona nuestra visión de sus capacidades. En estos últimos el rendimiento medio en las pruebas del CI se puede situar en la normalidad baja o en el límite de la normalidad, por lo que si no se hace un análisis más profundo del perfil de puntuaciones se podría llegar a la conclusión de que la baja capacidad intelectual es la causa del retraso.

Una vez detectados, en algunos sistemas educativos, incluido el nuestro, no reciben apoyo especializado, ya que sólo se contempla la intervención del profesor especialista en Audición y Lenguaje para las dificultades en

lenguaje oral o lectura. Mientras que el apoyo del profesor de Pedagogía Terapéutica va dirigido a otro tipo de alumnado: los niños de «integración». Esto hace que muchos terminen la etapa de Educación Primaria estresados y que desarrollen una baja autoestima, ya que deben esforzarse más que sus compañeros para no «quedarse atrás».

Con el fin de ajustar el tipo de intervención necesitamos conocer los tipos de DAM o discalculias y sus características diferenciadoras. Existen múltiples clasificaciones; vamos a recoger sólo dos, una clásica y muy utilizada, sobre todo desde la neuropsicología, la del eslovaco Ladislav Kosc, y otra más reciente y desde una perspectiva más psicológica, la del americano David Geary.

10.2.1.1. Tipología clásica

Kosc (1974) define la discalculia como un desorden estructural, de origen genético o congénito, de aquellas partes del cerebro que son sustrato de la maduración de las capacidades matemáticas y que por tanto afecta a la evolución de las capacidades matemáticas, sin que se dé a la vez un desorden simultáneo de funciones mentales generales. Propone la siguiente tipología:

1. **Discalculia verbal:** Dificultad en nombrar términos y relaciones matemáticas. Les cuesta nombrar cantidades, numerar objetos, nombrar los símbolos de las operaciones y los numerales.
2. **Discalculia léxica:** Dificultad para leer símbolos matemáticos: dígitos, números y signos operativos (parecido a la alexia para los números).
3. **Discalculia gráfica:** Dificultad para escribir números y símbolos de operaciones (parecido a la agrafia para los números).
4. **Discalculia operacional:** Dificultad para llevar a cabo operaciones aritméticas (llamada por otros anaritmetría).
5. **Discalculia practognósica:** Perturbación de la habilidad de manipular objetos reales o dibujados con fines matemáticos: enumerar, estimar y comparar cantidades, ordenar por magnitudes,

decir qué objeto es más grande o más pequeño, indicar correctamente cuándo dos objetos son del mismo tamaño, etc.

6. **Discalculia ideognósica:** Dificultad para comprender ideas y relaciones matemáticas necesarias para los cálculos mentales: leen y escriben números a pesar de no comprender lo que han escrito ni la relación de unos números con otros. Por ejemplo, saben escribir el 9 pero no saben que 9 es la mitad de 18, o que 9 es menor que 10, o que es igual a 3×3 .

Hemos recogido esta clasificación por ser una de las más citadas en la literatura científica, pero difícilmente se observan en la escuela discalculias tan específicas. Normalmente solemos encontrarnos con niños que presentan errores típicos de dos o más de estos subtipos.

10.2.1.2. Propuesta actual

Geary (1994) considera que las dificultades de aprendizaje en matemáticas pueden deberse a causas muy diversas, como la ansiedad o las dificultades en lectura, así como también a dificultades específicas en matemáticas (DAM). En este último caso, los déficits específicos que se observan afectan a cinco componentes potenciales:

1. Conteo u otros tipos de procedimientos aritméticos.
2. Recuperación de hechos numéricos.
3. Conocimiento conceptual.
4. Memoria de trabajo.
5. Velocidad de procesamiento (especialmente conteo rápido).

Los dos primeros componentes son funcionales, es decir, se manifiestan durante el proceso de resolución de problemas y contribuyen a la ejecución en test de papel y lápiz. Los tres componentes restantes representan tareas que deben ser la base o que contribuyen a la ejecución de los componentes procedimentales o de recuperación de la memoria.

La tipología propuesta por este autor agrupa a los DAM en tres subtipos: semántico, procedimental y visoespacial.

1. Tipo semántico

La ejecución de estos niños se caracteriza por emplear poco el recuerdo de hechos numéricos (ejemplo: saber de memoria que $7 + 3$ es igual a 10) para responder a las operaciones, y si lo hacen cometen muchos errores, a pesar de haber practicado intensivamente estos contenidos. Las adquisiciones matemáticas parecen seguir un desarrollo diferente y la ejecución es cuantitativamente distinta a la de los niños normales, mostrando una mínima mejoría de un curso a otro.

Suelen estar asociadas a dificultades de lectura, especialmente con las que presentan déficits fonológicos. Y aunque la existencia de una predisposición genética no es clara, Geary sugiere que este déficit puede ser heredable.

2. Tipo procedimental

Su ejecución se caracteriza por la frecuencia de errores en la ejecución de procedimientos (ejemplo: se olvidan de las llevadas en la resta) y por el uso de procedimientos inmaduros (ejemplo: ante $3 + 5$ necesitan representar con los dedos el 3 y el 5 y después cuentan todos los dedos). Presentan competencia normal en hechos numéricos. Muchos parecen mostrar una habilidad baja y un desarrollo retrasado más que una dificultad en matemáticas per se, es decir, responden de forma similar a la de los niños más jóvenes, son niños académicamente normales y mejoran de un curso a otro.

3. Tipo visoespacial

Se observan dificultades con la representación espacial de la información numérica, tales como dificultades de alineación de los números en los problemas de aritmética de múltiples columnas o rotación de números. Así como pérdida de interpretación de la información numérica representada espacialmente, tales como errores del valor del lugar.

No parece estar asociada con dificultades en lectura, o al menos no con las formas que presentan déficits fonológicos.

A continuación mostramos algunos ejemplos de los errores cometidos por estos niños en la resolución de algoritmos.

EJEMPLOS DE ERRORES COMETIDOS POR LOS DISTINTOS SUBTIPOS	
$\begin{array}{r} 83 \\ \times 25 \\ \hline 335 \\ 166 \\ \hline 1995 \end{array}$	Semántico: confunde 8×5 con 8×4 y tiene que contar para poder sumar $6 + 3$ las dos veces. Para poder descubrir la fuente de estos errores debemos pedirle que resuelva la operación «pensando en voz alta».
$\begin{array}{r} 1 \\ 98 \\ - 19 \\ \hline 119 \end{array}$	Procedimental: En lugar de pedir prestado 10 unidades a la decena ha confundido el procedimiento de resta con el de sumar, le ha añadido 10 unidades a la decena.
$\begin{array}{r} 123 \\ 39 + \\ \hline 314 \end{array}$	Visoespacial: Coloca mal las columnas y el signo, empieza por la izquierda y el número escrito como 9 en realidad debería ser un 6.

10.2.2. Déficits asociados

Las dificultades de aprendizaje no suelen presentarse solas, de modo que algunos niños DAM pueden presentar además déficits de atención, dificultades de lectura, dificultades de aprendizaje no verbal, problemas de conducta o trastornos del lenguaje. Creemos que es interesante para el lector conocer un poco más sobre algunos de estos déficits añadidos, pues le permitirá diferenciar la fuente de los errores matemáticos que están observando en los alumnos DAM.

10.2.2.1. Dificultades de lenguaje escrito

Es bastante frecuente que los disléxicos presenten dificultades en matemáticas (del 17% al 63%, dependiendo del autor).

El simple hecho de leer mal hace que tengan problemas para hacer las tareas matemáticas, pues en nuestras escuelas las matemáticas se suelen trabajar con lápiz y papel. En estos casos podemos conseguir que su rendimiento sea normal si minimizamos el número de palabras que utilizamos en los problemas y les ayudamos con apoyo visual.

Los niños con dificultades en lectura asociadas a déficits en el procesamiento fonológico y en la memoria auditiva suelen tener déficits específicos en recuperación de hechos numéricos. Otros aspectos matemáticos como el conteo y el uso del mismo para resolver problemas de adición no parece que estén relacionados con los problemas en lectura. Algunos investigadores defienden que los niños con dificultades en lectura y en matemáticas presentan una disfunción del hemisferio izquierdo y un déficit verbal común como base de ambas dificultades. Este déficit se observa en las dificultades en representación y recuperación de información semántica desde la memoria a largo plazo. Esto puede incluir problemas de recuperación de hechos numéricos en aritmética simple y dificultades de reconocimiento de palabras y conciencia fonológica en la lectura.

Por el contrario, en el caso de observarse sólo dificultades en matemáticas se sugiere que subyace un déficit visoespacial como resultado de una lesión del hemisferio derecho. Las habilidades visoespaciales parecen jugar un papel importante en el conteo y en la aritmética temprana, pues los niños deben usar la manipulación y los dedos para representar los conjuntos con el fin de ser contados, sumados o restados. Esta representación visoespacial de los conjuntos de números ayuda a los niños a entender la tarea y a regular su propia ejecución.

Por tanto, parece razonable esperar que los niños DAM detectados en los primeros años por presentar dificultades en matemáticas derivadas de problemas lectores tengan más probabilidades de superar su retraso a lo largo de la escolaridad. En cambio, los déficits visoespaciales pueden tener un impacto severo a largo plazo, aun cuando permanezcan ocultos en los primeros cursos de Educación Primaria gracias a la presencia de buenas habilidades lectoras y de lenguaje oral.

10.2.2.2. Dificultades de aprendizaje no verbal (DANV)

Las DANV son poco conocidas y todavía menos detectadas, pues no presentan dificultades en la lectura, que suele ser el indicador de éxito académico. Estos niños muestran dificultades en tres niveles: en el desarrollo motor, en la organización visoespacial (CI manipulativo inferior a CI verbal) y en la competencia social (ver [cuadro siguiente](#)).

CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS Y DESARROLLO DE LOS NIÑOS CON DANV Strang y Rourke (1985)

Procesos básicos: La atención selectiva y sostenida es mejor para los estímulos repetitivos, simples y verbales (especialmente auditivos) que para los estímulos complejos, novedosos y noverbales. La memoria repetitiva de material que se pueda codificar fácilmente de forma verbal se desarrolla correctamente, pudiendo llegar a ser excelente, mientras que las memorias táctil y visual son pobres. En los primeros años de vida parecen presentar problemas en percepción auditiva, pero posteriormente se observa un buen desarrollo en discriminación, segmentación y repetición fonémica.

Lenguaje: Aunque presentan deficiencias en las praxias orofaciales, en la prosodia y en el nivel pragmático del lenguaje, alcanzan buenos resultados en las tareas que requieren el uso de habilidades lingüísticas receptivas, verbales repetitivas, de la memoria a largo plazo de material verbal, de la asociación verbal y de la respuesta verbal.

Las **habilidades motoras** repetitivas están intactas, especialmente en los niños de más edad, mientras que en la psicomotricidad compleja muestran evidentes dificultades de coordinación, más marcadas en el lado izquierdo. En los más pequeños se puede apreciar que las conductas exploratorias físicas de todo tipo están limitadas. En los primeros años de la escolarización presentan dificultades con el dibujo y con la escritura cursiva que mejoran con la práctica.

Habilidades visoespaciales: Tienen dificultades para discriminar y reconocer detalles y relaciones visuales, sobre todo si éstos son novedosos, y deficiencias en las habilidades de organización visoespacial.

Lectoescritura: Tras problemas iniciales en el desarrollo del análisis de las características visoespaciales de las letras, se puede observar un nivel de lectura de palabras entre bueno y excelente. La comprensión lectora es más pobre que la lectura de palabras. Las dificultades en la comprensión escrita, especialmente de material novelado, tiende a incrementarse con la edad.

Matemáticas: Existe una sobresaliente deficiencia en los mecanismos aritméticos, sobre todo si lo comparamos con su ejecución en la lectura. El 75 por ciento de los niños de más de 8 años que presentan DANV tiene dificultades en matemáticas, que se traducen en problemas para alinear columnas de números, mantener la direccionalidad, organizar el trabajo y comprender los conceptos matemáticos. El nivel absoluto de ejecución en matemáticas raramente excede del 5º curso. El razonamiento matemático, en comparación con el desarrollo del cálculo aritmético, tiene una evolución pobre.

Competencia social y afectividad: Presentan dificultades extremas para adaptarse a situaciones nuevas y complejas, por lo que en estos casos su conducta puede parecer ruda e inapropiada. El juicio social y la interacción social son pobres, pudiendo llegar incluso al aislamiento. A menudo cuando son pequeños presentan conducta disruptiva e hiperactividad que se va normalizando con el paso de los años, algunos de estos niños se vuelven hipoactivos. Cuando son mayores tienen más riesgo de presentar ansiedad y depresión.

Los padres y los profesores no suelen preocuparse a pesar de la mala coordinación, la lenta adquisición de las habilidades motoras y la poca exploración del espacio. Incluso pueden pensar que el niño tiene capacidades superiores, pues en algunos casos hablan y aprenden a leer muy pronto. Muchos llegan a los 10 o 14 años sin haber sido evaluados por parte de los Equipos Psicopedagógicos. Si a esta edad presentan problemas emocionales, los orientadores pueden considerar que estos problemas son la causa de las actuales dificultades escolares. Para obtener un diagnóstico más fiable sería útil hacer un análisis en profundidad de los cuadernos de los primeros años de escolaridad, pero para ello sería recomendable que los profesores creasen unas «carpetas de trabajos de los alumnos» en las que se recogieran algunas muestras de las actividades individuales realizadas en clase a lo largo de los diferentes cursos.

10.2.2.3. Dificultades en funciones ejecutivas

En ocasiones las dificultades de aprendizaje han sido descritas como de naturaleza metacognitiva (planificación, control o monitorización y evaluación). Pero antes de llegar a la conclusión de que un niño tiene dificultades matemáticas derivadas de un problema en las funciones ejecutivas, se debe analizar el tipo de errores que producen:

1. Errores de monitorización: Son inconsistentes (ante la misma tarea unas veces cometen errores y otras no) y no sistemáticos (varía el tipo de error). Los niños pueden empezar bien la operación pero la calidad de la ejecución decrece según va avanzando en los pasos de la misma. Además pueden tener dificultades para decidir si ha terminado la operación o alguno de sus pasos intermedios. No mejora con el entrenamiento y no es consciente de su imprecisión.

2. Déficit en el conocimiento o el procedimiento: Los errores son consistentes y sistemáticos. La ejecución no decrece según se van realizando los diversos pasos del procedimiento y sabe si ha terminado la operación o alguno de sus pasos. En estos casos después del entrenamiento su ejecución mejora y suelen ser conscientes de su dificultad.

Así, por ejemplo, la [Figura 10.1](#) muestra dos restas con errores de distinta naturaleza. La primera resta presenta un error al contar desde el 9 al 15, es decir, un error de ejecución, mientras que en la segunda el error es de tipo procedimental, se mezclan los algoritmos de suma y resta.

FIGURA 10.1

TIPOS DE ERRORES	
$\begin{array}{r} 7 \\ 85 \\ - 19 \\ \hline 68 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \\ 85 \\ - 19 \\ \hline 106 \end{array}$

10.3. INTERVENCIÓN EDUCATIVA

Una vez delimitadas las dificultades de los alumnos, se deben tomar decisiones sobre las adaptaciones curriculares y los recursos humanos y materiales complementarios necesarios para su puesta en práctica.

La programación de actividades con estos alumnos debe ser personalizada, ya que no es fácil encontrar dos alumnos con las mismas lagunas y el mismo ritmo de aprendizaje.

Estas adaptaciones deberían ser una propuesta explícita, en la que se recojan los objetivos y los contenidos concretos que se pretenden enseñar y se fijen los criterios que se deben superar al final de curso o ciclo. Así mismo, es necesario revisarlas periódicamente con el fin de comprobar si es preciso incluir contenidos insuficientemente abordados, ampliarlos o repasar conceptos o procedimientos previos.

10.3.1. Ideas básicas sobre el apoyo

Tanto el profesor del aula como el profesor de apoyo pueden proporcionar, entre otras, las siguientes ayudas:

- Asistencia directa, en la que se enseña un procedimiento o un concepto concreto que el alumno no tenga adquirido, tal como queda recogido en los capítulos precedentes.
- Simplificar o ampliar el material con explicaciones.
- Eliminar temporalmente algunos objetivos programados para el resto de los alumnos en su adaptación curricular.
- Mantener o introducir otros contenidos ya superados por el resto de los compañeros.
- Estructurar los temas de modo que el aprendizaje parta de los materiales y del conocimiento previo del niño.
- Utilizar el andamiaje o aprendizaje mediado.
- El profesor u otro alumno pueden hacer de modelo, realizando demostraciones del proceso seguido en un razonamiento o poniendo en práctica un determinado procedimiento.
- Darle la oportunidad de poder comparar su conocimiento conceptual con el de sus compañeros, mediante la discusión en grupo pequeño o grande.
- Enseñar de forma explícita estrategias y habilidades metacognitivas de regulación del propio aprendizaje.

- Programar la generalización y transferencia de lo aprendido a otros contextos.

10.3.2. Estrategias de intervención

10.3.2.1. Partir de la matemática informal y de lo que conoce el niño

Muchos niños poseen un buen conocimiento matemático informal, pero muestran dificultades cuando deben establecer relaciones entre su conocimiento y los procedimientos formales, el lenguaje y el sistema de notación de las matemáticas escolares. Estos niños necesitan oportunidades para experimentar en contextos concretos y con materiales que faciliten la conexión entre su conocimiento informal y el conocimiento formal de la escuela.

En nuestros centros de Educación Infantil podemos observar cómo los niños usan frecuentemente «fichas» para asociar dibujos y frases. Sin embargo, los dibujos son representaciones semiabstractas y pueden resultar confusas a la hora de realizar conexiones entre sus conceptos y el nuevo lenguaje. Por ello, los profesores con más experiencia en estas etapas saben que el uso de materiales concretos que se puedan juntar, separar o cambiar de sitio, son herramientas más apropiadas y eficaces que las representaciones pictóricas.

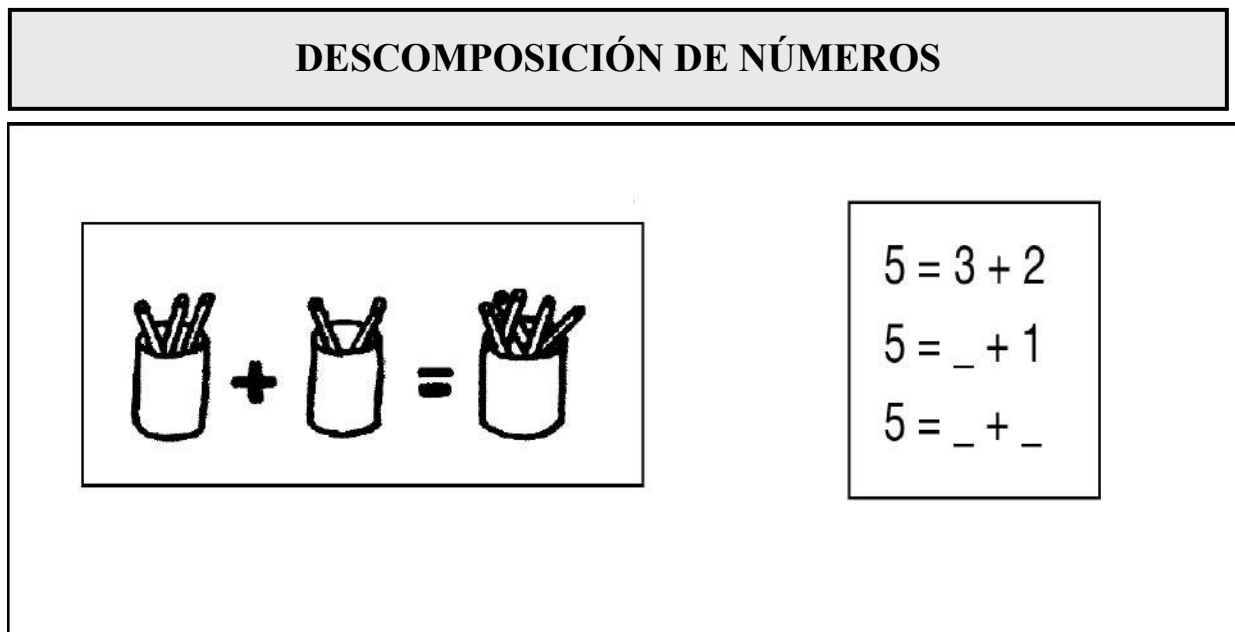
10.3.2.2. Uso de lo manipulativo y concreto

El uso de material concreto es especialmente importante en el inicio de los aprendizajes. Hay estudios que evidencian que los estudiantes que utilizan materiales concretos desarrollan una comprensión mental más precisa, están más motivados, tienen mejores ideas matemáticas y las aplican mejor en la vida cotidiana. O lo que es lo mismo, presentan un mejor desarrollo del «sentido del número». Muchas de las confusiones de los alumnos en

notación matemática se deben al tipo de material utilizado, que suelen ser los libros de texto y las fichas.

Por ello es recomendable ir de lo concreto a lo abstracto. El mismo Bruner habla de tres tipos de representaciones cada vez más abstractas: enactiva, icónica y simbólica. Estas representaciones están ordenadas por su complejidad y dificultad, de modo que es bueno programar las actividades de los alumnos desde esta perspectiva. Por ejemplo, podemos enseñar la descomposición de un número en la suma de otros dos, ofreciendo al niño la posibilidad de manipular lápices y botes, tal como muestra la [Figura 10.2](#).

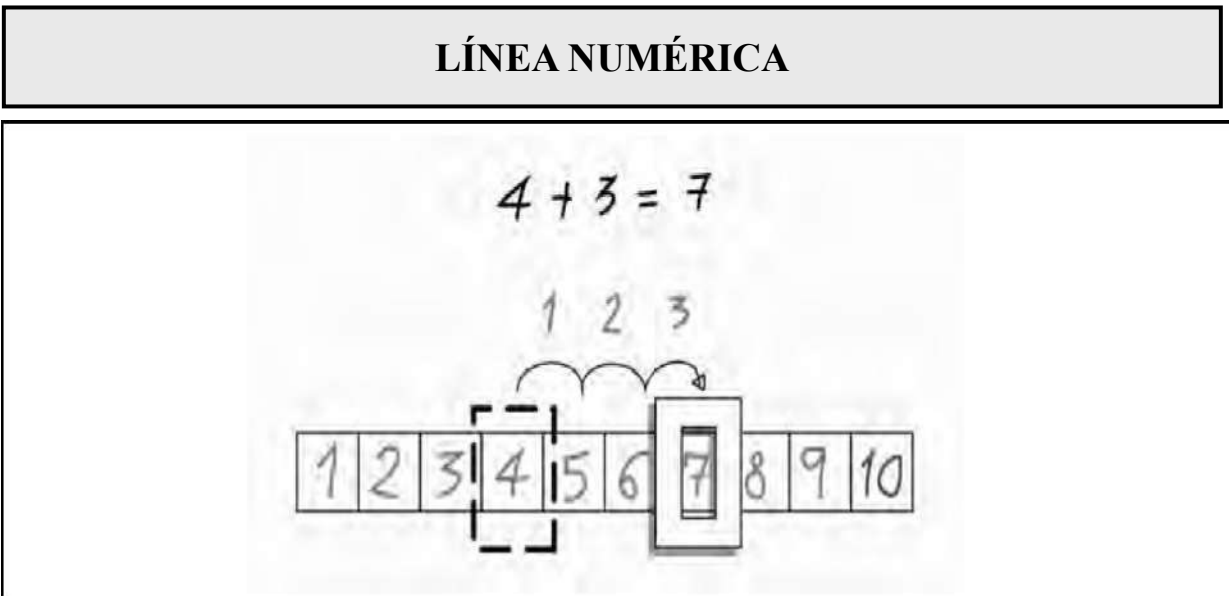
FIGURA 10.2



En este sentido, no se debe prohibir el uso de los dedos, ya que constituyen la forma más natural de acceder a la numeración y al cálculo.

Cuando se manejan números mayores y el uso de los dedos sea insuficiente, podemos ofrecer otros tipos de apoyo visual. Algunos autores recomiendan el uso de la fila numérica con cursor, familiarizando al alumno con este material desde Educación Infantil mediante su uso como calendario. En este caso sería recomendable sustituir el cursor por una ventana a través de la cual se vea el día del mes (ver [Fig. 10.3](#)).

FIGURA 10.3



Igualmente, es aconsejable el uso de diagramas, gráficos, etc., que permitan representar gráficamente los problemas. Muchos de nosotros hemos utilizado la escalera para sumar y restar, pero la idea ofrecida por algunos autores de combinar la escalera con el de regletas con puntos nos parece muy interesante. Permite al niño un apoyo visual en el desarrollo de estrategias de retrocontar para la resta o contar desde uno de los elementos en la suma, pues en todo momento pueden ver en la escalera el número de elementos de cada escalón (ver [Fig. 10.4](#)) (Brissland, 1989).

Ahora bien, para evitar confusiones conviene guardar cierta coherencia en el uso de estos materiales. Así, por ejemplo, casi todos los libros de matemáticas de Educación Primaria representan las unidades como un cuadrado azul, las decenas como una barra roja y las centenas como una tableta verde. Pero podría ser más útil representar estos elementos en cartulinas o madera y que los niños puedan manipularlos desde Educación Infantil, antes que dedicar tiempo al aprendizaje de la relación color-número de las regletas de Cuisenaire que sólo se utiliza en esa etapa. Igualmente, sería bueno emplear los mismos materiales en la clase ordinaria que en la clase de apoyo o al realizar las tareas en casa. Lo mismo ocurre con respecto al modo de representar la descomposición numérica: dígitos de colores, representación con el ábaco y representación con cuadros y barras (ver [Fig. 10.5](#)).

FIGURA 10.4

ESCALA NUMÉRICA

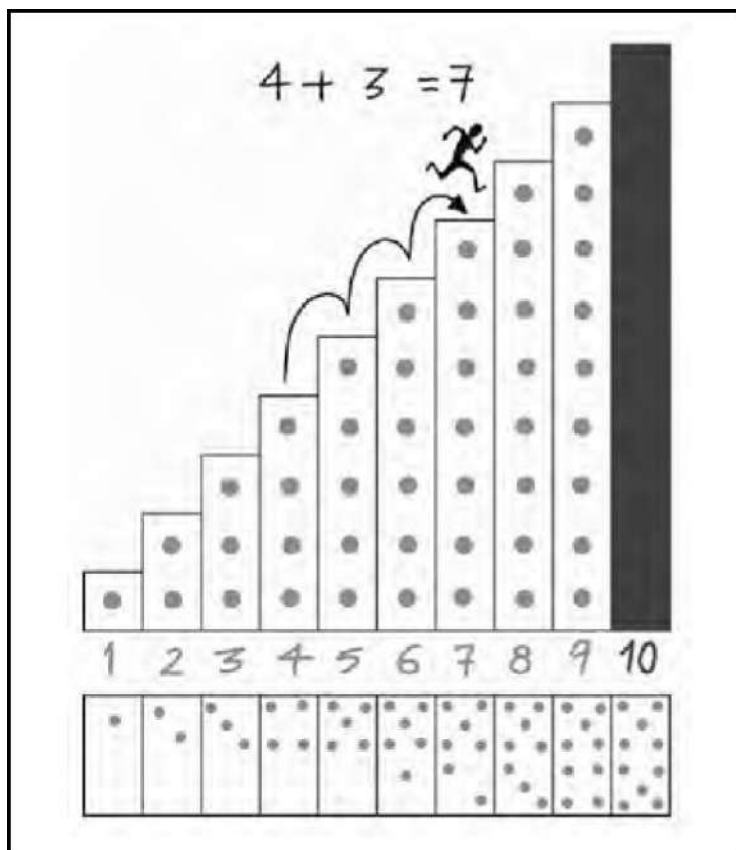
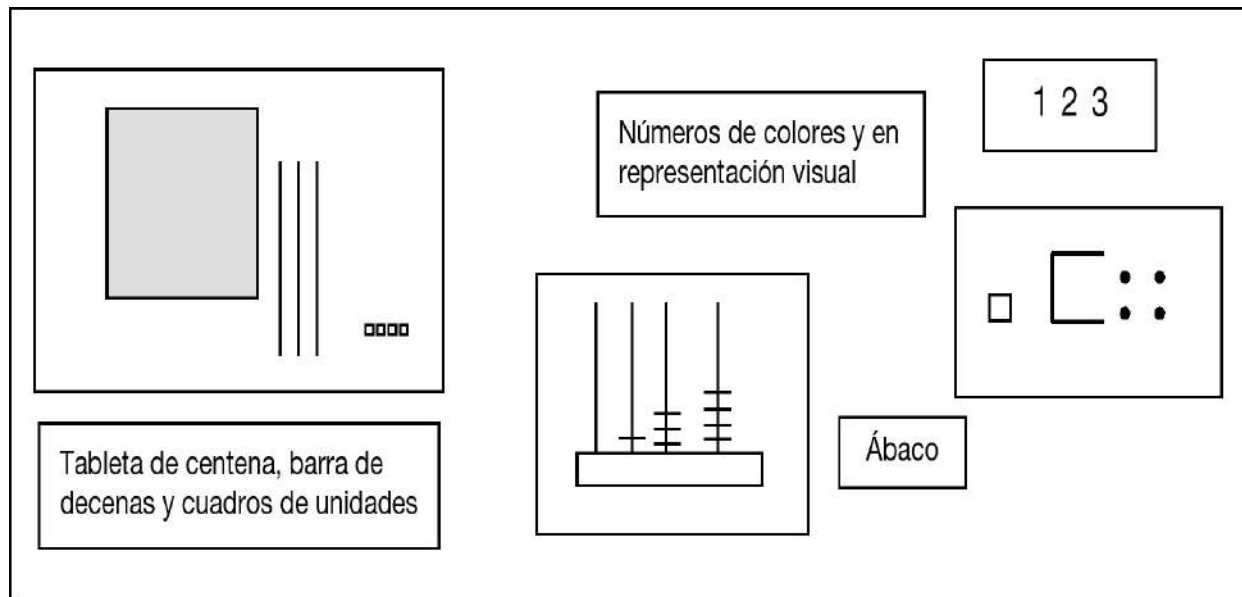


FIGURA 10.5

DIVERSAS REPRESENTACIONES VISUALES DEL NÚMERO

134



10.3.2.3. Aprendizaje cooperativo

En las clases de matemáticas, más que en ninguna otra, los alumnos se muestran competitivos. Esto puede deberse, en parte, al modo de corregir las tareas matemáticas, que se valoran como «bien» o «mal», sin valoraciones intermedias, como puede ocurrir cuando hacen un dibujo o inventan un cuento. Esta característica de las matemáticas hace que los alumnos con dificultades se sientan más ansiosos y tengan menos posibilidades de éxito. Por ello, es importante el uso del aprendizaje cooperativo en matemáticas, pues elimina la competencia entre los alumnos y mejora la integración de los niños con dificultades.

Ahora bien, para que el aprendizaje sea realmente cooperativo se requieren las siguientes condiciones (ver Rivera, 1996):

- Interdependencia positiva: Los estudiantes conocen la importancia de trabajar en grupo.
- Interrelación cara a cara: Supone que la situación ambiental les permite el contacto ocular y los estudiantes pueden discutir.
- Responsabilidad individual: Cada miembro del grupo tiene que trabajar y no permite que otro realice todo el trabajo.

- Conducta de grupo: Se refiere a las habilidades interpersonales, sociales y cooperativas necesarias para trabajar con otros de forma satisfactoria.
- Procesamiento de grupo: Es un tiempo de procesamiento después de la actividad cooperativa cuando el equipo analiza sus propias habilidades y las de los otros en el trabajo cooperativo.

Por otra parte, hay algunos factores que favorecen el aprendizaje cooperativo. Resaltamos algunos de ellos:

- Conviene asignar responsabilidades concretas a cada miembro del grupo, por ejemplo nombrando un portavoz, un encargado de realizar los cálculos, de dibujar o de redactar la respuesta. Podemos encomendar al alumno con dificultades aquellas tareas en las que sea más hábil.
- Proporcionar materiales limitados que necesariamente deban compartir.
- Distribuir el espacio para que los estudiantes interaccionen en pequeños grupos de cuatro o cinco niños.
- Conviene que los grupos sean heterogéneos, es decir, con diversos niveles de habilidad.
- El profesor debe monitorizar el progreso de los estudiantes, facilitar el trabajo del grupo haciendo preguntas que les ayuden a resolver sus tareas y reforzar el esfuerzo de los niños para trabajar de forma cooperativa e investigar las soluciones de los problemas.

Finalmente, dado que el aprendizaje cooperativo no resulta simple, conviene preparar las actividades. Así, si nunca se ha trabajado de forma cooperativa, es aconsejable empezar con actividades que no sean de matemáticas ni de lengua, como por ejemplo hacer un mural juntos, dibujar un coche entre todos, etc. Si observamos que el grupo tiene dificultades para darse mutuamente instrucciones, podemos trabajar este aspecto antes. Una forma puede ser trazando un laberinto de tiza en el suelo y colocando a los alumnos por parejas, uno de los miembros de la pareja con los ojos tapados se coloca en el centro del laberinto, la función del otro componente será darle instrucciones para que encuentre rápido la salida.

Algunas actividades de tipo cooperativo se pueden realizar, tal como suelen hacer los profesores de Educación Infantil, por medio de rincones. Como por ejemplo, comprar y vender en la «la tienda» o resolver problemas aplicando diversas unidades de medida en «la cocina». Con el fin de que la actividad sea provechosa para el alumno con dificultades conviene trabajar antes con él los contenidos de la actividad.

10.3.2.4. Ritmo de aprendizaje: práctica intensiva versus compensación

Los niños con dificultades necesitan más práctica que los niños sin dificultades. Por tanto, no debemos desanimarnos por el hecho de que en algunas ocasiones no se avance, y por supuesto, nunca se debe comentar este desánimo delante del niño, sino que, al contrario, es importante enfatizar sus progresos. Conviene por ello definir bien los objetivos a conseguir y la temporalización que va a necesitar, así como los materiales o actividades complementarias. El ritmo de aprendizaje de los libros de texto es adecuado para la media de la clase, pero no lo es ni para los alumnos con dificultades ni para los alumnos más capaces. Igualmente, y debido a la organización jerárquica de las matemáticas, es recomendable evitar el uso del currículo en espiral en el área de matemáticas, ya que puede hacer que introduzcamos contenidos demasiado pronto, se dé poco tiempo para asimilarlos y se aprendan de forma mecánica. Esta metodología es especialmente peligrosa con los estudiantes con dificultades.

Frente a la persistencia de dificultades para aprender determinados contenidos podemos adoptar dos estrategias: realizar práctica intensiva o aportarle algún método que le permita compensar esta dificultad. En el caso de que nos decidamos por la práctica intensiva, debemos tener presente que ésta debe ser motivadora e interactiva, y en este sentido el uso de juegos, por ejemplo, constituye un medio eficaz para conseguirlo. Además, la cantidad de práctica es tan crucial como el nivel de atención prestado por el niño, de manera que conviene distribuirla en períodos pequeños, siendo más eficaz dedicar 15 minutos al día que una hora cada cuatro días.

Veamos un ejemplo referido al aprendizaje de hechos numéricos. En este caso convendría tener en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Trabajar un número pequeño de hechos numéricos por sesión.
- Realizar prácticas frecuentes con grupos mixtos.
- Enfatizar la reversibilidad y la propiedad conmutativa (ej: $4+5$ / $5+4$, 6×7 / 7×6).
- Utilizar diversos formatos: repetición oral, escritura en horizontal, en vertical, etc.
- Emplear la autoevaluación del progreso de aprendizaje, de modo que el alumno conozca los hechos numéricos que sigue fallando y los que le faltan por aprender.
- Enseñarle estrategias de hechos numéricos para el cálculo mental, como por ejemplo los dobles y su relación con el doble más uno ($5+5$ y $5+6$).

Por otro lado, algunos niños pueden tener dificultades en un aspecto de las matemáticas y no en otros, por lo que si le aportamos métodos de compensación podemos seguir avanzando en la adquisición de contenidos en los que no presentan problemas. Por ejemplo, un niño puede presentar problemas para aprender hechos numéricos (ejemplo: $5+7 = 12$ o $4 \times 6 = 24$), por lo que al intentar solucionar una multiplicación necesita realizar cálculos laboriosos con los dedos que hacen que se pierda en la ejecución del algoritmo. Ello conlleva que no pueda avanzar en la adquisición de otras habilidades o que su rendimiento en clase sea bajo. En estos casos se le puede permitir, por ejemplo, usar una «tabla de bolsillo» para realizar cálculos complejos y resolver problemas. El uso de la tabla es preferible al uso de la calculadora, pues al ver el resultado de cada operación en la misma posición de la tarjeta le va a facilitar la memorización.

10.3.2.5. Adaptarse a los puntos fuertes y débiles de los alumnos

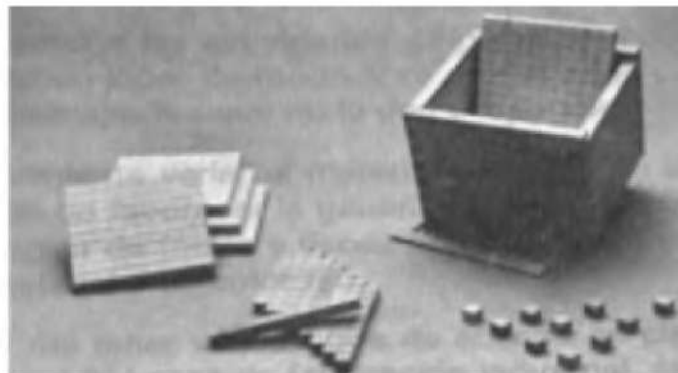
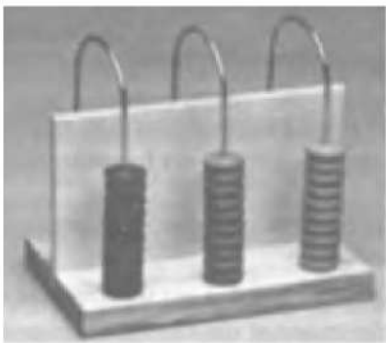
Algunos niños pueden presentar dificultades para: (a) seguir las explicaciones orales, mientras que otros (b) tienen dificultades para comprender los símbolos, los gráficos o las representaciones visuales.

a) En el primer caso se les puede ayudar explicando más lentamente, respetando el tiempo de cada frase y dando la información dividida en segmentos de contenido. Y si el niño no hace espontáneamente esquemas para representar problemas, se le puede enseñar de forma explícita cómo hacerlos, tal como se muestra en el [capítulo 4](#) con respecto a los PV, por ejemplo.

Como hemos comentado anteriormente, estos niños necesitan demostraciones con materiales concretos, sobre todo los más jóvenes, de modo que es útil el uso de material manipulativo tanto en la resolución de problemas como en las tareas dirigidas a la comprensión del número. Algunos de estos materiales pueden ser los ábacos, los bloques multibase, cubos encajables, metro, balanza, vasos graduados, formas geométricas, reloj, etc. (ver [Fig.10.6](#)).

FIGURA 10.6

MATERIAL DIDÁCTICO

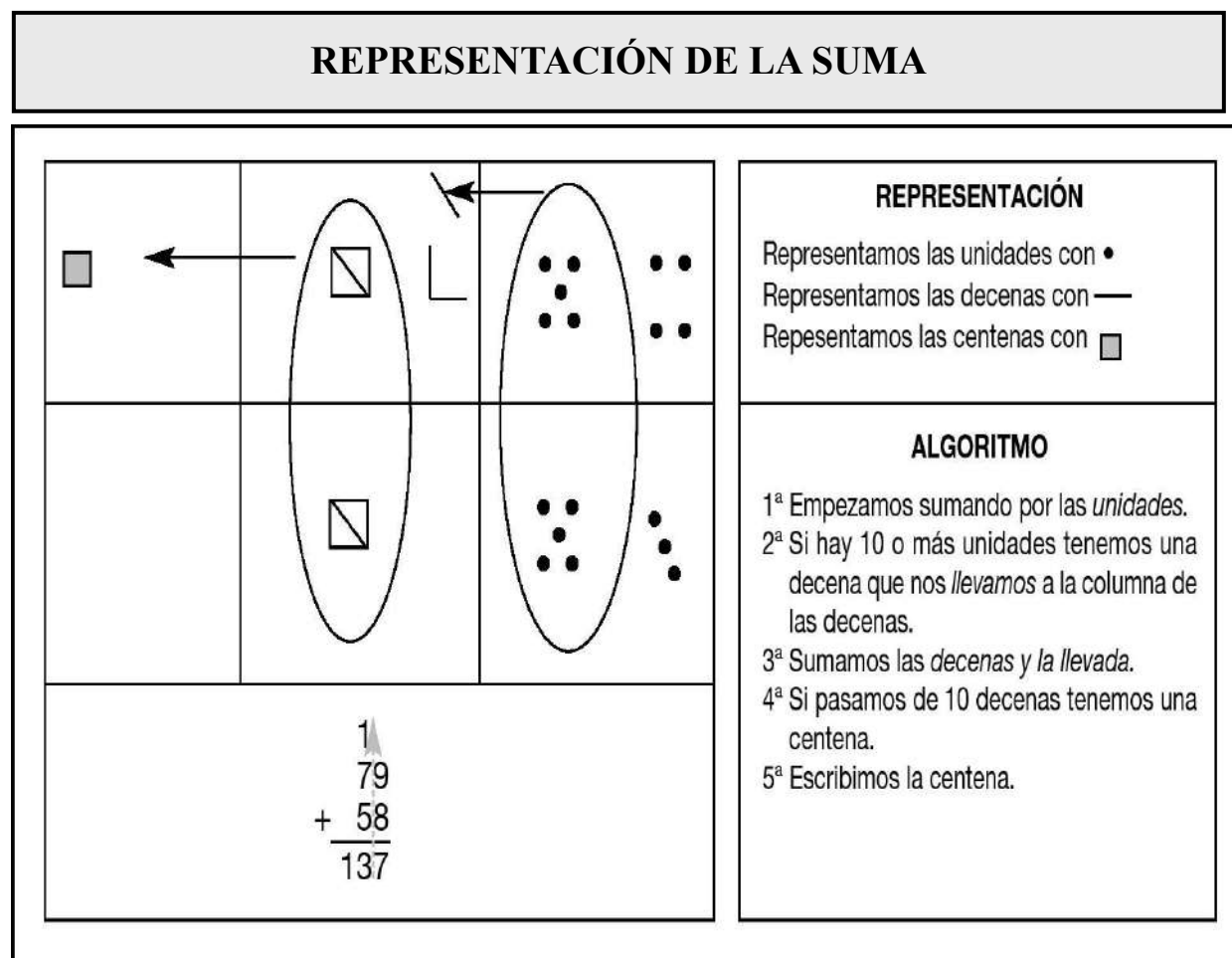


Además, los niños con déficits de lenguaje suelen buscar en los problemas «señales» que les indiquen qué deben hacer. Por ejemplo, en un problema en el que aparezca la palabra «menos» responden restando. Necesitan, pues, adquirir el hábito de leer el problema, decirlo con sus palabras, responderse a sí mismo a la pregunta ¿qué quiere decir?, y después

realizar los cálculos. Si autoverbaliza cada uno de estos pasos podrá reducir sus errores.

Otra forma de ayudarles puede ser dándoles los pasos que deben seguir en una tarjeta en la que con colores o con esquemas se van viendo cada uno de los momentos del algoritmo o del procedimiento de resolución de problemas. Por ejemplo, la suma con llevadas puede ser representada como se muestra en la [Figura 10.7](#).

FIGURA 10.7



Con estos niños las ayudas no deben apoyarse en las habilidades lingüísticas. Por ejemplo, ante la tarea de responder cuál de dos números es el mayor, no utilizaremos la muy usada frase «cuál va delante o detrás», pues

esto supone un buen manejo de la retahíla verbal. En su lugar le podemos pedir que lo represente con sus dedos y que decida cuál es el mayor.

b) Cuando aparecen dificultades en la comprensión de símbolos, gráficos o representaciones visuales, pero tienen buenas habilidades lingüísticas, convendría tener presente las siguientes sugerencias:

Para clarificar conceptos no deben utilizarse diagramas, dibujos, ni gráficos, sino más bien explicaciones verbales precisas y claras. La meta con estos niños debe ser construir un modelo verbal potente de las cantidades y sus relaciones, en lugar de una representación visoespacial. Las verbalizaciones también les serán útiles en la aplicación de los procedimientos o en seguir los pasos de las tareas de cálculo. A veces es necesaria mucha repetición verbal para avanzar muy poco. Por lo que si tienen buen nivel de lenguaje escrito y problemas para memorizarlas se le pueden dar por escrito.

También es útil presentar con mucho detalle los pasos seguidos en la operación. Por ejemplo, en el algoritmo de la resta se le pide que siga los siguientes pasos: «primero miro el signo, es restar», «muevo la mano a la derecha para empezar por ese lado», «compruebo si el número del minuendo es mayor que el del sustraendo en la columna de las unidades», etc. Debe aprender verbalmente estos pasos y aplicarlos a las operaciones hasta que alcance cierta pericia.

Estas verbalizaciones tienen que estar divididas en elementos sencillos, pues de lo contrario se podría sobrecargar la memoria de trabajo, haciendo que olviden los datos del problema o se pierdan en los pasos a seguir.

Cuando ya domina los pasos y los hechos numéricos de un algoritmo, es el momento de que el niño se enfrente a la representación visual de los mismos. Se pueden entonces proporcionar ayudas visuales en el proceso de introducir el concepto matemático.

Puesto que estos niños tienen dificultades para entender la organización y las relaciones visuales, tendremos que dar importancia a la asociación de estos materiales con estructuras verbales de forma repetida. Por ejemplo, puede aprender la forma «triángulo» mediante la manipulación de un bloque lógico a la vez que repite «el triángulo tiene tres lados» o «cuando dibujo un triángulo tengo que dibujar tres líneas».

10.3.2.6. Motivar

La motivación hacia la tarea es un factor importante en el aprendizaje de todos los alumnos, y especialmente de los DAM. Para promover una actitud positiva en los niños recogemos a continuación algunas sugerencias.

Diseñar actividades animadas y divertidas. El juego es una de las actividades más motivadoras para todos los niños. Por ejemplo: Jugamos a los bolos o a los dardos para aprender los conceptos de unidad y decena. Para ello dibujamos en el encerado el siguiente cuadro, en el que vamos apuntando los tantos con un palito en las unidades, cuando llegamos a 10 palitos los borramos y trazamos un palito en la decena, repetimos el procedimiento las veces que sea necesario y al final escribimos el número de tantos conseguidos (ver [Fig. 10.8](#)).

FIGURA 10.8

REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	
D	U
//	///
23	

A los niños con Necesidades Educativas Especiales, al igual que al resto de los alumnos, les gustan los retos, por eso es recomendable no dar ayudas innecesarias, ni dar toda la información de manera explícita. En este sentido se pueden presentar problemas no rutinarios (ver [cap. 4](#)).

El uso de la fantasía queda muchas veces fuera de las clases de matemáticas, a pesar de que los alumnos disfrutan mucho imaginando otros

mundos y de que imaginación y matemáticas no tienen por qué ser incompatibles. Por ejemplo, si queremos introducir la invención de problemas, el profesor puede pedir a los alumnos que se imaginen navegando en un OVNI y les plantea las siguientes preguntas: ¿a dónde llegaríais? (les pedimos que lo dibujen), ¿qué tipo de recuerdos os gustaría comprar para enseñárselos a vuestras madres? (lo escriben en una lista), ¿cuánto crees que os costaría cada uno?, ¿cuánto dinero necesitaríais? (escriben la cantidad) y ¿qué creéis que os preguntaría vuestra madre cuando se los enseñaseis?, ¿creéis que os harían alguna pregunta sobre el precio?, etc.

Por otra parte, antes de introducir un nuevo contenido conviene crear la necesidad de aprenderlo. Por ejemplo, antes de introducir los problemas de dos pasos pedimos a los niños que cojan 50 céntimos de la «paga del domingo» y vayan al quiosco a comprar dos caramelos. Al día siguiente se discute en pequeño grupo cómo ha sabido cada uno que le habían dado bien la vuelta.

Imitar la realidad dentro del aula puede dar respuesta a esta meta, es decir, reproducir en la clase las situaciones con las que se va a encontrar fuera del colegio (un quiosco, una tienda, un autobús, su casa, etc.) y solucionar los problemas matemáticos como un juego (comprando en el quiosco, subiendo al autobús, realizando la compra, haciendo un pastel, etc.).

10.3.2.7. Autorregulación y autoestima

En muchas ocasiones, los profesores de apoyo obsesionados con que los alumnos puedan realizar las mismas tareas que sus compañeros, les prestan excesivas ayudas. Esto hace que se vuelvan muy dependientes, que no tengan una idea realista de sus propias habilidades y que tengan dificultades para generalizar lo aprendido a otros contextos, como son el aula ordinaria o su vida cotidiana. Por ello, el uso de ayudas debe ser parte de un proceso cuyo final es la ejecución independiente. Desde esta perspectiva conviene que el alumno se enfrente a la tarea y desarrolle todas las funciones ejecutivas que puedan estar influyendo negativamente en la consecución de los objetivos de la tarea: planificar la actividad, estimar el resultado posible, seguir los pasos marcados, repasar, valorar la coherencia del resultado y

autocorregirse. Esto es especialmente necesario en el área de matemáticas, en la que los alumnos suelen centrar la atención en la valoración del resultado exacto en lugar de hacerlo en el proceso, tal como podemos observar cuando les enfrentamos a un problema y responden rápidamente «de restar» o «de sumar», sin reflexionar ni justificar su respuesta.

Veamos en el cuadro siguiente un ejemplo de este tipo de autoinstrucción para enfrentarse a la solución de problemas sencillos.

PASOS PARA SOLUCIONAR PROBLEMAS	
1. Planificar: Debo pensar antes de responder y seguir los siguientes pasos:	
2. Leo el problema despacio y lo repito en voz alta con mis palabras.	
3. Busco la información importante:	¿Qué datos conozco?
	¿Qué pasa con los elementos del problema?
	¿Qué me piden?
4. Decido: ¿Qué operación debo aplicar?	
5. Estimación: ¿Cuál creo que será el resultado?	
6. Realizo la operación.	
7. Comprobar el resultado: Leo de nuevo el problema y compruebo que el resultado tiene sentido.	¿El resultado se parece a lo estimado?
	¿El resultado responde a la pregunta?
8. Autovaloración:	Lo he hecho bien. ¡GENIAL! Debo volver a intentarlo. Seguro que lo consigo.

Igualmente, para facilitar la reflexión se puede pedir a los niños que verbalicen sus estrategias y sus métodos de autoevaluación mediante la discusión en grupo. Así mismo, es conveniente preguntar a los estudiantes cómo ha influido el uso de estas estrategias en sus avances y discutir las estrategias inmaduras con todo el grupo.

La autorregulación tiene mucha relación con la autoestima. Los niños DAM suelen tener una imagen negativa de sí mismos y bajas expectativas, de modo que no suelen enfrentarse a los nuevos aprendizajes con una actitud positiva. Por ello es importante explorar en qué actividades pueden destacar con el fin de potenciar su desarrollo y mejorar su propia imagen. También puede ser útil darles ejemplos de personas ilustres que han tenido dificultades de aprendizaje, por ejemplo, Picasso, de quien se dice que le

costó aprender a leer y escribir, pero que sobre todo mostraba serias dificultades con los números.

10.4. EVALUACIÓN Y COORDINACIÓN ENTRE TODOS LOS MIEMBROS DEL SISTEMA EDUCATIVO

Con el fin de programar los objetivos y las actividades que vamos a desarrollar en la adaptación de los alumnos, es conveniente realizar una evaluación inicial en la que se recoja la competencia curricular en matemáticas, el estilo de aprendizaje y los factores que están influyendo en su rendimiento (baja autoestima, ansiedad, problemas de atención, etc.). Nos interesa saber qué sabe hacer y cómo aprende mejor, así como cuáles son sus puntos fuertes y sus puntos débiles. En la evaluación curricular es importante analizar el tipo de errores, observar sus estrategias de aprendizaje y valorar cómo responde a las ayudas del profesor, para elaborar un programa de instrucción más adaptado a sus necesidades. Es fundamental en este proceso establecer una buena coordinación entre el tutor y los profesores de apoyo y entre éstos y los padres.

En este sentido, muchas veces los docentes nos olvidamos de que los padres no son profesionales y que cuando ayudan a sus hijos a hacer los deberes reproducen los métodos educativos de nuestro país que ellos utilizaron hace 25-30 años. Se pueden utilizar las reuniones trimestrales con padres para dar esta información básica sobre cómo deben ayudar a sus hijos y, si es posible, conviene darles estas orientaciones por escrito, para que tengan la posibilidad de consultarlas cuando tengan dudas en casa. Pero si los padres no entienden nuestras explicaciones orales o escritas de cómo ayudarles, podemos intentar superar nuestro miedo escénico e invitarles a asistir a alguna sesión de clase (de apoyo o en la clase ordinaria).

Por otro lado, en las sesiones de evaluación trimestrales que realiza el equipo docente se comprueba si los objetivos y los criterios de evaluación programados para un determinado alumno se adaptan a su ritmo. Es conveniente recoger esta información en un documento que quede en el

expediente del alumno y entregar una copia a los padres, pues la valoración que se le entrega al resto de los alumnos (boletín de notas) se realiza en función de los criterios marcados para el grupo-clase en el Proyecto Curricular y no es de utilidad en el caso de los niños DAM.

Por supuesto, la coordinación entre el tutor y el profesor de apoyo debe ser estrecha y continua. Estos alumnos están en la clase ordinaria con el tutor la mayoría de las horas de matemáticas, por lo que el profesor de apoyo deberá recabar información sobre los problemas que ha encontrado el alumno a lo largo de la semana. La coordinación entre estos profesionales se facilita cuando el profesor de apoyo entra en el aula ordinaria. El tutor y el profesor de apoyo (sea éste el profesor de Pedagogía Terapéutica u otro profesor del colegio) pueden llegar a otros acuerdos sobre organización del aula, como, por ejemplo, que el profesor de apoyo se encargue del grupo-aula y que el tutor realice los refuerzos educativos de los niños con dificultades, pues éste tiene un conocimiento más amplio sobre ellos. Esta organización tiene la ventaja de que el alumno DAM no tiene que familiarizarse con la forma de trabajar de dos profesores y de que el tutor puede planificar la sesión dependiendo de las dificultades que haya ido observando en el alumno a lo largo de la semana. Si además queremos que el niño generalice lo que aprende, debemos involucrarle activamente, haciendo que participe en el establecimiento de las metas de aprendizaje y en la valoración de la consecución de las mismas.

Concluimos este capítulo recordando cómo podemos contribuir a dar una mejor respuesta educativa cada uno de los implicados en el proceso de aprendizaje de los niños DAM. Los orientadores procurando su detección precoz y realizando un asesoramiento global, no sólo en lo que se refiere a la competencia curricular en matemáticas, sino también en el desarrollo de sus potencialidades y la prevención de problemas de autoestima. Los profesores dando una respuesta diferenciada a estos alumnos que contribuya a la adquisición de conceptos y algoritmos matemáticos funcionales que les permitan enfrentarse a la vida cotidiana. Los padres procurando no enfocar toda su relación con su hijo en las tareas escolares, buscando momentos y actividades de ocio que le permitan sentirse seguro y aceptado. Y la Administración procurando suficientes recursos personales para poder ofrecer una atención de calidad a todos los alumnos con NEE, así como facilitando y propiciando una mayor coordinación docente.

10.5. BIBLIOGRAFÍA

- Baroody, A. J. (1988). *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, Primary and Special Education Teachers* (Trad. Cast. El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial. Madrid: Visor-MEC, 1988).
- Brissiaud, R. (1989). *Comment les enfants apprennent à calculer*. París: Ed. Retz (Trad. Cast. El aprendizaje del cálculo. Más allá de Piaget y de la teoría de los conjuntos. Madrid: Ed. Visor, 1993).
- Bermejo, V., Lago, M^a O. y Rodríguez, P. (1997). «Dificultades de aprendizaje de las matemáticas». En J. N. Nicasio (Ed.), *Instrucción, aprendizaje y dificultades* (pp. 383-395). Barcelona: Ed. Librería Universitaria de Barcelona.
- Geary, D. C. (1994). *Children's Mathematical Developmental, Research and Practical Applications*. Washington D.C.: American Psychology Association.
- Gersten, R. y Chard, D. (1999). «Number Sense: Rethinking Arithmetic Instruction for Students with Mathematical Disabilities». *The Journal of Special Education*, n. 44, pp. 18-28.
- Hutchinson, N. L. (1992). «The Challenges of Componential Analysis: Cognitive and Metacognitive Instruction in Mathematical Problem Solving». *Journal of Learning Disabilities*, vol. 24, n. 4, pp. 249-252, 257.
- Kosc, L. (1974). «Developmental Dyscalculia». *Journal of Learning Disabilities*, n. 7, pp. 164-177.
- Miranda, A., Fortes, C. y Gil, M. D. (1998). *Dificultades de aprendizaje en matemáticas. Un enfoque evolutivo*. Granada: Aljibe.
- Rivera, D. P. (1996). *Using Cooperative Learning to Teach Mathematics to Students With Learning Disabilities*. Universidad de Texas, Austin. LD Forum: Council for Learning Disabilities.

- Rivera, D. P. (1998). *Mathematics Education for Students with Learning Disabilities. Theory to practice*. Austin: Pro-ed.
- Semenza, C., Miceli, L. y Girelli, L. (1997). «A deficit for arithmetical procedures: Lack of knowledge or lack of monitoring?» *Cortex*, n. 3, pp. 483-498.
- Strang, J. D. y Rourke, B. P. (1985). «Arithmetic disability subtypes: the neuropsychological significance of specific arithmetical impairment in childhood». En B. P. Rourke (Ed.), *Neuropsychology of learning disabilities: essentials of subtype analysis* (pp. 167-183). New York: Guilford Press.

11

El PEIM: Un programa de intervención

V. Bermejo

11.1. INTRODUCCIÓN

Las altas cotas de fracaso escolar en matemáticas requieren la urgente aplicación de programas de intervención para mejorar la formación de nuestros escolares. Los factores responsables de esta situación educativa son múltiples y resulta difícil, si no imposible, que un solo programa de intervención afecte a todos ellos por igual. De ahí la variedad de proyectos de intervención, que presentan alcances diferentes y consiguen niveles de eficacia igualmente diferentes. Unos pretenden ser generales, aunque de hecho difícilmente pueden llegar a serlo, mientras que otros se refieren a contenidos específicos más o menos limitados (para ver algunos de ellos, Bermejo, 1996; Bermejo y otros, 2002).

Ahora bien, un programa de intervención eficaz debe recoger entre sus objetivos, al menos, los siguientes:

- 1) El alumno, con sus diferencias cognitivas y afectivas, es agente de sus propios aprendizajes, de modo que la regulación externa de los procesos de aprendizaje debe ir dando paso progresivamente a una autorregulación por parte del alumno.
- 2) Apoyar oportunamente tanto el aprendizaje constructivo como el acumulativo, así como la instrucción directa y el aprendizaje por descubrimiento.
- 3) Los entornos de aprendizaje deben ser ricos en recursos culturales, instrumentales y materiales, que presenten conexiones con la vida extraescolar.

Como no hay espacio físico en el plan de este libro para presentar los diferentes programas de intervención propuestos, me voy a limitar a describir con cierta amplitud los basamentos centrales de mi programa «Programa Evolutivo Instruccional» (PEIM) para la mejora del rendimiento matemático y los resultados obtenidos en su aplicación (ver Bermejo y otros, 2002 para otros programas).

11.2. LOS PILARES CONSTRUCTIVISTAS DEL PROGRAMA

Un buen programa de intervención requiere, al menos, la adecuada integración de conocimientos evolutivos e instruccionales. Desde esta perspectiva, el PEIM parte de la idea de que una instrucción eficaz supone un amplio conocimiento, no sólo del desarrollo general del alumno, sino también y sobre todo de los desarrollos específicos de los contenidos fundamentales del currículo escolar. Así, las teorías evolutivas de Piaget y Vygotsky, por ejemplo, son útiles en el aula de matemáticas, pero no es menos útil e instructivo para el docente conocer los desarrollos concretos de los contenidos matemáticos, como el desarrollo de la adición, sustracción, etc. Ello va a facilitar en todo momento las tareas de diagnóstico e intervención por parte del profesor.

Por otra parte, el constructivismo no es un enfoque monolítico y simple, sino que más bien constituye una perspectiva compleja e integradora. De ahí que se hable de diferentes clases de constructivismo:

- a) **endógeno-exógeno**, según que se insista más en la construcción interna de estructuras holísticas o en la construcción del conocimiento a partir de la interacción con el entorno;
- b) **cognitivo-sociocultural** cuando se enfatizan bien los procesos de construcción individual, bien los procesos socioculturales (ver Fosnot, 1996).

El PEIM recoge e integra aspectos pertenecientes a los distintos constructivismos, considerando tanto los procesos constructivos individuales como los procesos constructivos socioculturales (Saxe, 1991).

Cuatro ideas básicas constituyen los pilares teóricos sobre los que se asienta el PEIM:

11.2.1. Los alumnos construyen sus propios conocimientos

El niño no adquiere pasivamente de su entorno los conocimientos matemáticos, sino que los construye activamente a través de sus acciones físicas y mentales. Así, por ejemplo, los niños resuelven sus primeros problemas aditivos manipulando objetos o sus propios dedos. Ahora bien, para que esta autoconstrucción sea exitosa, la vía más adecuada no es la reiteración o la práctica repetida de ideas o situaciones matemáticas, sino que sobre todo se requiere que los contenidos sean significativos para los alumnos. Ello se consigue, por una parte, cuando los contenidos matemáticos escolares están relacionados con los conocimientos adquiridos anteriormente por los niños, especialmente las adquisiciones informales o extraescolares. (No hay que olvidar que el origen de muchos de los conocimientos matemáticos infantiles se encuentra en actividades o situaciones informales.) Y, por otra, resulta igualmente importante que los contenidos instruccionales estén relacionados con la vida real extraescolar de los niños.

Desde la perspectiva sociocultural se resalta la participación en actividades culturalmente organizadas, centrándose en torno a las interacciones profesor-alumno. Igualmente se intenta dar cuenta de cómo los alumnos se apropian de las contribuciones del profesor. En cambio, desde un enfoque cognitivo se insiste más en la actividad individual, analizando los procesos de adaptación del alumno a las acciones de los otros y evaluando las diferencias cualitativas del pensamiento individual. Sin embargo, en ambos casos se defiende igualmente la actitud activa y constructiva de los alumnos, de modo que se comprende mejor la estructura cognitiva de un individuo si lo observamos en interacción con su medio físico y social, así como que el conocimiento cultural tiene su origen en las construcciones, transformaciones e interpretaciones individuales. Por tanto, el aprendizaje de las matemáticas es el resultado tanto de procesos de autoorganización como de enculturación al participar en actividades interactivas culturalmente organizadas. Los alumnos se sienten más motivados en su actividad matemática al considerar que las matemáticas constituyen un modo de pensar sobre los problemas y sobre sí mismos como personas capaces de controlar y crear matemáticas.

Desde esta perspectiva, la labor del docente resulta más compleja, o en todo caso, es diferente con respecto al rol tradicional desempeñado por estos profesionales.

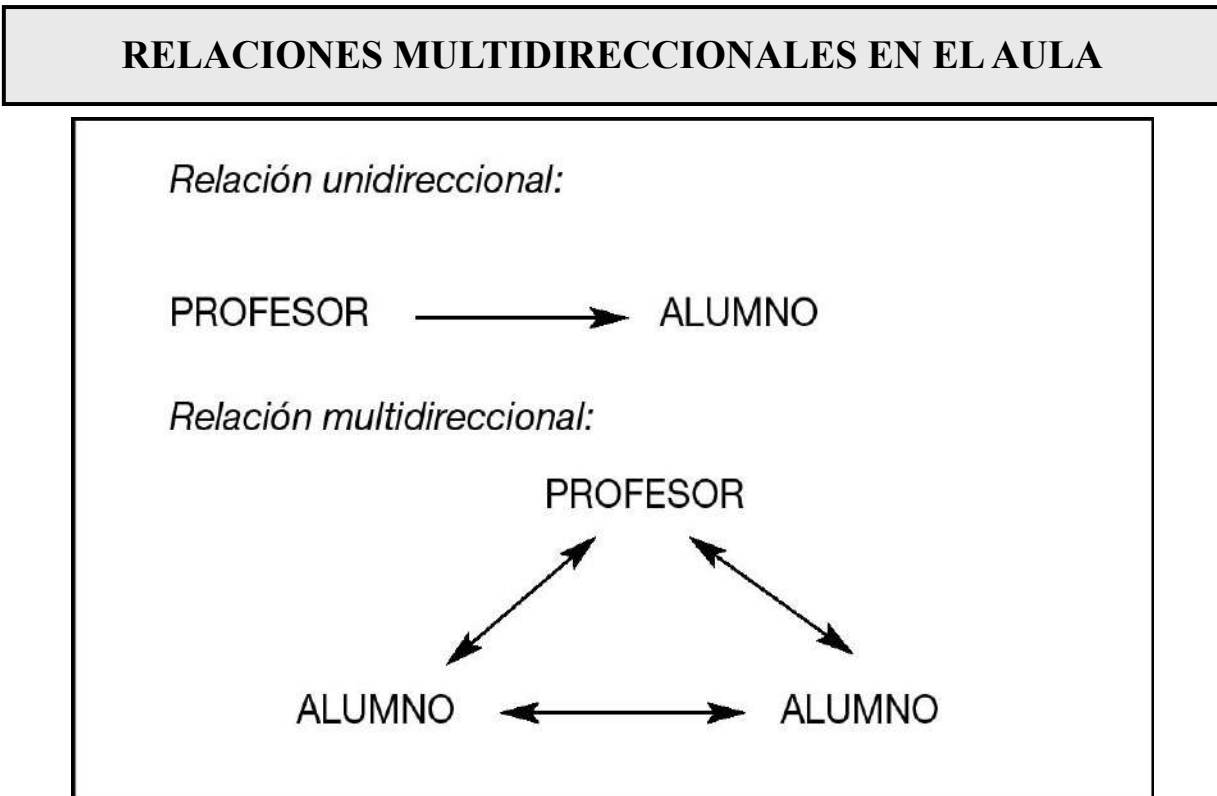
11.2.2. El docente guía y apoya la construcción del conocimiento por parte del alumno

Desde una perspectiva tradicional, la instrucción persigue sobre todo presentar los conocimientos matemáticos de una manera clara y organizada, utilizando materiales curriculares creativos e ingeniosos, así como estrategias educativas que hagan más transparentes los conocimientos matemáticos. En cambio, desde un marco constructivista resulta prioritario que los alumnos desarrollen ideas personales sobre las matemáticas y utilicen sus propios métodos para resolver los problemas planteados.

Ello supone una profunda transformación en la dinámica del aula, ya que si hasta ahora las relaciones que se establecían eran principalmente

unidireccionales, ahora estas relaciones son bidireccionales o multidireccionales (ver Fig. 11.1). Efectivamente, los alumnos no se limitan a recibir información, sino que se debe favorecer la discusión, la reflexión en torno a los nuevos contenidos, la crítica y explicación de sus propios métodos, sin las premuras que frecuentemente aparecen para alcanzar los objetivos curriculares previstos en los programas. Una vez más hay que insistir en que, en caso de conflicto, que no debería haberlo, es prioritaria la calidad de la formación de los alumnos con respecto a la cantidad de contenidos impartidos.

FIGURA 11.1



Este planteamiento supone cambios importantes en el modo de entender los roles del profesor y alumno en el aula. Ya no se trata solamente de reforzar respuestas correctas y corregir las erróneas, sino sobre todo de guiar y facilitar el proceso de aprendizaje, estructurando el clima sociocognitivo de la clase en orden a que los estudiantes discutan, den significado a las tareas, solventen los conflictos, justifiquen sus métodos o procedimientos

empleados para resolver problemas, expliquen sus interpretaciones, etc. Ello supone igualmente entender por parte de los profesores que aunque estas explicaciones no siempre se ajusten perfectamente a la matemática formal, no dejan de ser, sin embargo, razonables e interesantes desde el punto de vista educativo.

Las actividades de aprendizaje cooperativo suelen ser eficaces para mejorar la formación matemática de los alumnos (Saxe y Guberman, 1998). En este caso, es bueno concienciar a los estudiantes de que este tipo de situaciones suele beneficiar al grupo y a los individuos, en el sentido de que un buen rendimiento personal facilita el rendimiento de los demás, así como que el propio rendimiento depende del buen rendimiento de los compañeros. Ahora bien, las actividades cooperativas, sean éstas en grupos pequeños o con toda la clase, requieren la negociación de ciertas normas sociales que faciliten el funcionamiento del aula. Así, se regularán las explicaciones personales, las explicaciones presentadas por los otros, los acuerdos-desacuerdos, el conflicto de interpretaciones, la búsqueda del consenso, etc. En todo caso, estas normas son negociables, pudiendo modificarse cuando el buen funcionamiento de la clase lo requiera. Pero además de estas normas, que pueden aplicarse en todas las clases, existen otras normas específicas del aula de matemáticas, que algunos autores denominan «normas sociomatemáticas». Se trata de normas intrínsecas a la clase de matemáticas, como, por ejemplo, lo que es importante o más eficiente en matemáticas, qué tipo de explicación resulta más apropiado en la clase de matemáticas, cómo hacer justificaciones adecuadas en matemáticas, etc. Conviene resaltar que estas normas se establecen también de manera interactiva y consensuada en el aula, de modo que no vienen impuestas desde fuera. Ello favorecerá el desarrollo de la autoestima y confianza de los alumnos, que harán sus propuestas y presentarán sus explicaciones sin temor a equivocarse y sin esperar que sea el profesor quien decida sobre la validez de los métodos explicativos aportados.

Ahora bien, la asunción de estas ideas requiere una formación frecuentemente diferente de la adquirida por el profesorado de matemáticas. Sus conocimientos pedagógicos suelen adquirirse de manera descontextualizada y teórica, cuando el mejor modo de aprender es a partir de la experiencia reflexionada y mediante el estudio de casos concretos que ponen frecuentemente de relieve modos alternativos de afrontar las

situaciones más o menos conflictivas. Uno de estos conflictos aparece, por ejemplo, cuando por una parte, el profesor anima a los alumnos a que construyan sus propias interpretaciones matemáticas y, por otra, es sabedor de las interpretaciones formales o institucionalizadas.

11.2.3. La comprensión y solución de problemas constituye el centro de la instrucción

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de EE.UU. (NCTM) establece con toda claridad en el año 2000 que los alumnos deben «construir los nuevos conocimientos matemáticos a través de la solución de problemas». Efectivamente, como hemos indicado anteriormente, los aprendizajes se facilitan considerablemente si los contenidos matemáticos son significativos para los alumnos, y ello se consigue si las tareas matemáticas se presentan en contextos relacionados con el mundo real de los niños. Además, sabemos que los primeros desarrollos conceptuales adquiridos por los niños sobre la adición y sustracción, por ejemplo, suelen originarse en situaciones cotidianas extraescolares en las que «se da» o «se quita» algo, pero rarísimamente proceden del aprendizaje de los algoritmos. Por otra parte, en no pocas investigaciones he constatado que los escolares de primer ciclo de EPO no sólo no escriben el algoritmo antes de proceder a resolver los problemas verbales planteados, sino que incluso se muestran incapaces para hacerlo después de resolver el problema, o escriben una expresión numérica que no se corresponde con el procedimiento realizado.

Igualmente, he señalado en no pocas ocasiones (ver Bermejo, 1996) que el objetivo final de la instrucción es la comprensión. No sólo por la consabida idea piagetiana de que sólo se aprende lo que se comprende, por otra parte discutible desde una perspectiva vygotskiana, sino porque ello garantiza una mejor integración y estructuración de los conocimientos infantiles. Por tanto, dado que los problemas verbales constituyen el medio más natural para que los niños se acerquen a las matemáticas, parece más adecuado que se inicie la instrucción en el aula de estos contenidos planteando situaciones atractivas y reales en las que aparecen problemas verbales como partes que integran y configuran esas situaciones.

Por otra parte, Schoenfeld señala tres funciones que además desempeñarían los problemas:

1. Permiten repasar y consolidar ideas matemáticas importantes.
2. Desarrollan en los alumnos la habilidad para usar los conceptos matemáticos.
3. Finalmente, pero no menos importante, favorecen la formación de conexiones entre conceptos matemáticos y una mayor comprensión de los mismos.

Por tanto, no parece tener fundamento afirmar, como a veces se ha hecho, que la centración en la solución de problemas cause pérdidas en la habilidad del cálculo en los escolares.

11.2.4. El desarrollo de los contenidos específicos es un buen indicador para secuenciar los objetivos instruccionales

Tradicionalmente los contenidos instruccionales han sido secuenciados en función de la estructura matemática de los mismos. Ello explicaría, al menos en parte, que generalmente la instrucción comenzase con la enseñanza de los procedimientos y símbolos matemáticos formales. Sin embargo, dado que actualmente se insiste acertadamente en que el proceso enseñanza-aprendizaje debe centrarse especialmente en el aprendiz, parece lógico que su desarrollo constituya una buena base para estructurar los contenidos instruccionales. Ello implica que, desde una perspectiva constructivista, el profesor debería poseer una formación más completa, en el sentido de que no sólo sería bueno que conociera el desarrollo general de los alumnos (por ejemplo, la teoría de Piaget), sino sobre todo el desarrollo de los contenidos específicos. Así, por ejemplo, con respecto a la adición, los profesores deberían conocer los pasos evolutivos que aparecen en la adquisición de las estrategias de resolución, los tipos de errores que suelen cometer los niños en diferentes problemas verbales, las diversas categorías de problemas verbales y su orden de adquisición, los factores explicativos de las dificultades encontradas por los niños a la hora de resolver los problemas,

los cambios evolutivos relacionados con el concepto de adición, etc. Esta competencia conferiría al profesor la posibilidad eficaz de **evaluar** los conocimientos actuales de sus alumnos, de **diagnosticar** las dificultades y conflictos cognitivos que los alumnos pudieran presentar a lo largo de la resolución de un problema, así como de **intervenir** eficientemente en el momento oportuno.

Estas competencias suponen por tanto un alto conocimiento, no sólo del alumno en general, que también, sino sobre todo del **alumno aprendiendo unos contenidos** específicos bien precisos. Es por ello que en la secuenciación de los objetivos instruccionales se ha de tener en cuenta, no sólo la estructura matemática de los contenidos, sino también, y sobre todo, al niño, con sus dificultades, carencias y competencias, ya que es el verdadero protagonista del aprendizaje. Más en concreto, no cabe duda de que para planificar, por ejemplo, la enseñanza de los problemas verbales de sumar y restar resulta de gran utilidad el conocimiento de la secuenciación de estos problemas en función de la dificultad que presentan los niños para resolverlos.

11.3. DESCRIPCIÓN DEL PEIM

El PEIM (Programa Evolutivo Instruccional para Matemáticas) es el resultado de muchos años de trabajo en la elaboración de un instrumento de intervención psicopedagógica para mejorar el rendimiento matemático de los escolares. Es difícil ser insensible a las altas cotas de fracaso escolar en matemáticas en nuestro país (ver Introducción). Enseñantes, investigadores, políticos, etc., tenemos grandes responsabilidades en este ámbito que no podemos escamotear o desdeñar.

El PEIM es un modelo integrador e interdependiente constituido por los siguientes componentes:

- a) los alumnos,
- b) el profesor,
- c) los contenidos,
- d) el clima social del aula (ver [Fig. 11.2](#)).

Pienso que interviniendo pertinentemente en cada uno de estos pilares se conseguirá el objetivo del programa, es decir, la mejora del rendimiento matemático en el niño, entendido el término «rendimiento» no sólo como ejecución, sino sobre todo como comprensión de los contenidos matemáticos.

Por otra parte, aquí como en muchos otros ámbitos, es bueno el dicho de que más vale prevenir que curar. Efectivamente, pienso que la incidencia del PEIM será tanto más fácil y de mayor eficacia cuanto más pronto la apliquemos en el currículo escolar. Además, desde la psicología evolutiva o la psicología del aprendizaje sabemos que los primeros años o las primeras experiencias suelen ser cruciales en el desarrollo individual en general, y en el desarrollo matemático en particular. Por ello, entiendo que este programa conviene aplicarlo ya desde los primeros años escolares, justo cuando los niños adquieren sus primeros hábitos de aprendizaje y actitudes sobre las matemáticas.

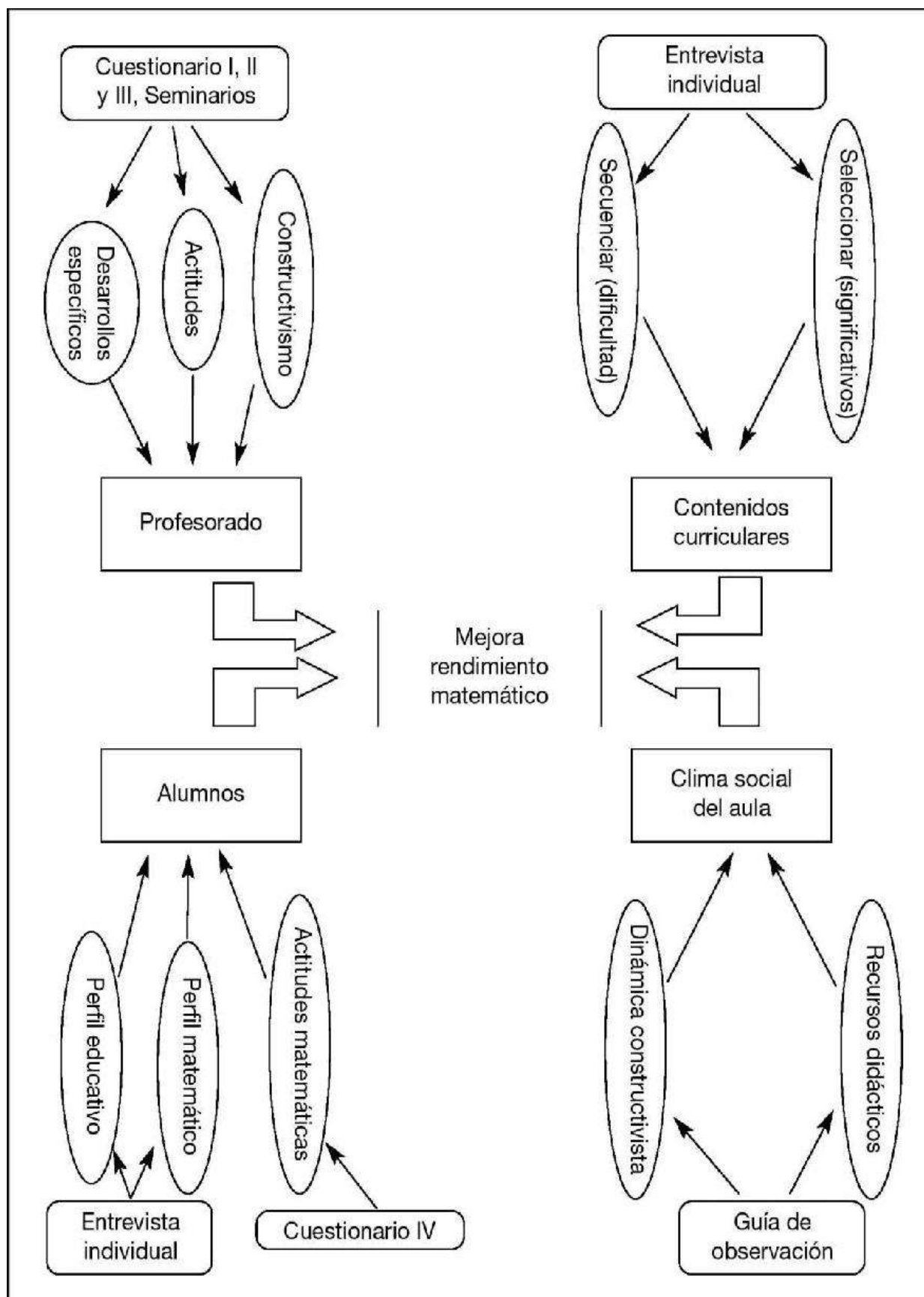
A continuación se analizan cada uno de los cuatro parámetros o factores fundamentales del PEIM: los alumnos, el profesorado, los contenidos curriculares y el clima social del aula.

11.3.1. Los alumnos: Educación personalizada

Como se indica anteriormente, el proceso enseñanza-aprendizaje debe estar centrado en torno al alumno, al aprendiz. Desde esta perspectiva la Asociación de Psicólogos Americanos (APA) propuso en 1993 un conjunto de principios psicológicos centrados en el aprendiz que deberían servir de guía para reformar las escuelas americanas. Entre otros principios mencionamos algunos que interesan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas:

1. El proceso de aprendizaje residiría en descubrir y construir significados.

ESQUEMA GENERAL DEL PEIM



2. La construcción del conocimiento consistiría en relacionar los nuevos conocimientos con los anteriores.
3. Pensar sobre sus propios pensamientos promueve su compromiso y confianza.
4. El aprendizaje es más eficaz cuando los contenidos son apropiados al desarrollo del niño (ver Lambert y McCombs, 1998).

Igualmente, el Consejo Nacional de los Profesores de Matemáticas de EE.UU. (NCTM) establece en el año 2000 algunos principios para la enseñanza de las matemáticas, entre los que resalto el Principio de aprendizaje («*Learning Principle*»): «los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión, construyendo activamente el nuevo conocimiento desde la experiencia y el conocimiento anterior».

Desde ambas instituciones se insiste en la relevancia de una de las ideas centrales del constructivismo: **los alumnos construyen activamente sus propios conocimientos**. Aquí se resalta el talante **activo** de los niños en esta construcción, de modo que escuchan, pero también responden y preguntan, razonan, relacionan y resuelven problemas, hacen conjeturas y proponen soluciones apoyándose en la evidencia y argumentos matemáticos. Igualmente, este principio insiste en la importancia de la **comprensión** en el aprendizaje de las matemáticas, sin excluir no obstante otros comportamientos matemáticos orientados a la adquisición de automatismos, a la memorización, etc.

El PEIM propone una educación matemática personalizada, en la que el profesor evalúe, diagnostique e intervenga continuamente en el aula. Para ello, el PEIM pone en manos de los docentes un instrumento útil que les permite llevar a cabo estos cometidos de un modo eficaz. Se trata de los «perfiles matemáticos» individuales, que facilitan el conocimiento en todo momento del nivel actual de competencia matemática de cada alumno, así como su zona de desarrollo próximo. La «entrevista individual» constituye un modo eficaz para elaborar estos perfiles de una manera detallada y precisa, que posteriormente irá adecuando y modificando el mismo profesor en función de los nuevos desarrollos infantiles. Un ejemplo de perfil matemático aparece en la [Tabla 11.1](#). En ella se recoge el perfil de siete alumnos de 1º de EPO con respecto a los distintos problemas verbales y numéricos de sumar y restar, con la incógnita en el primer término y en el

resultado. Como puede observarse, en cada tarea se indica la estrategia utilizada para resolverla o el tipo de error cometido.

Por otra parte, el rendimiento matemático de los niños depende en gran medida de las creencias y actitudes que tengan sobre las matemáticas, de modo que actitudes negativas como «no me gustan las matemáticas», «son difíciles», «no sirven para nada», etc., influyen en el aprendizaje de los escolares (Bermejo y otros, 2000). Por ello, el PEIM también pretende intervenir a este nivel («Cuestionario IV»), modificando creencias y actitudes si ello fuera necesario.

TABLA 11.1

EJEMPLO DE PERFILES MATEMÁTICOS DE SIETE ALUMNOS DE 1º DE EP															
A L U M	CAMBIO				CB	COMPARACIÓN		IGUALACIÓN				ALGORITMO			
	2	3	5	6	3	1	4	1	3	4	6	2	3	5	6
1	4	5	10	D	A	5	10	12	10	10	2	13	A	13	D
2	K	A	A	D	K	11	10	10	11	10	1	13	K	13	D
3	1	A	2	2	A	2	1	1	10	2	1	2	14	13	13
4	H	A	H	D	A	5	A	10	10	10	B	13	A	H	D
5	1	1	1	8	1	2	2	1	2	1	2	14	14	13	13
6	5	B	4	E	A	8	8	8	K	K	F	5	A	5	K
7	5	A	4	D	A	1	A	1	1	1	4	14	A	14	14

ESTRATEGIAS: A: contar todo; B: contar desde uno de los sumandos; D: quitar de; E: contar hacia atrás desde lo dado; F: contar hacia atrás; G: contar hasta; H: quitar a; I: juntar a; K: memorísticas; L: estrategias de cálculo mental.

ERRORES: 1: repetir una cantidad; 2: inventar la respuesta; 3: algoritmo incorrecto; 4: transforma el problema; 5: error de conteo; 6: cálculo mental; 8: no sabe hacerlo; 9: suma unidades con decenas; 10: palabra clave; 11: no sabe con cantidades grandes; 12: confunde números; 13: no conoce los signos+/-; 14: no conoce la sentencia algorítmica.

11.3.2. El profesor: Formación psicopedagógica y específica de los contenidos

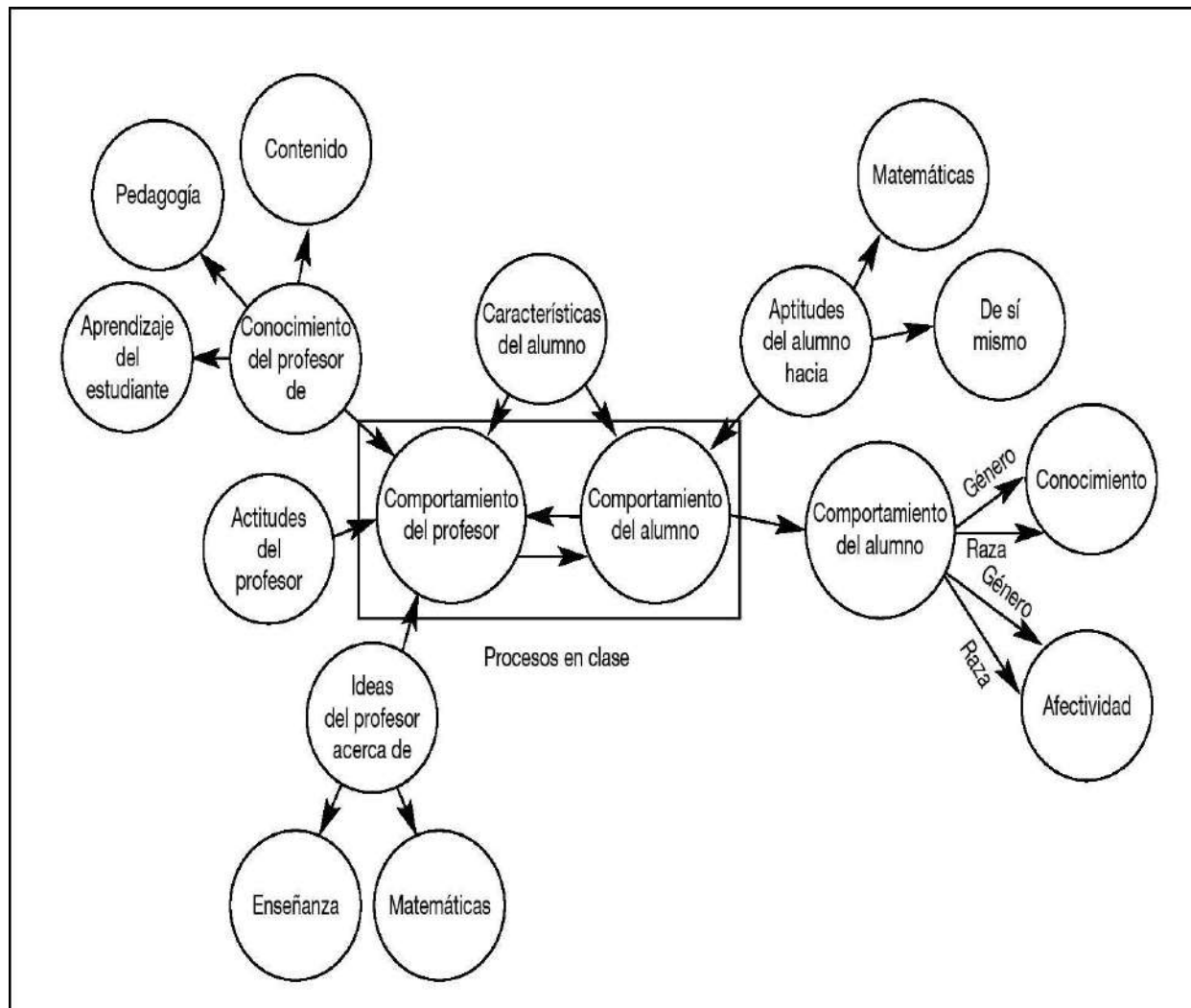
El segundo componente del PEIM es el profesorado. El rendimiento de los alumnos depende igualmente de la formación de los profesores, de modo que el principio de enseñanza del NCTM (*«Teaching Principle»*) postula que «la enseñanza efectiva de las matemáticas requiere comprender lo que los estudiantes conocen y necesitan para aprender, así como retarlos y apoyarlos para que aprendan bien», o más adelante proponen que la enseñanza efectiva requiere conocer las matemáticas, a los estudiantes como aprendices y las estrategias pedagógicas.

La formación del profesorado ha sido frecuentemente insuficiente e inadecuada. Efectivamente, no es raro, incluso hoy, encontrar carencias importantísimas en los planes de estudios universitarios para profesores, como, por ejemplo, el proponer la Psicología del desarrollo como asignatura optativa. Igualmente, se echan en falta asignaturas que se ocupen del desarrollo específico de los contenidos matemáticos en el niño. Si, como hemos señalado más arriba, el proceso enseñanza-aprendizaje debe centrarse en el niño, resulta indispensable que los profesores conozcan a los niños, especialmente su desarrollo tanto general como específico. Por otra parte, a veces es igualmente inadecuada la formación que se ofrece al profesorado, como ocurre, por ejemplo, cuando las Escuelas Universitarias de Profesorado o las Facultades de Educación ofertan una formación que se centra principalmente en torno a actividades matemáticas avanzadas, cuando muchos de estos profesores van a dedicarse a enseñar a sumar y restar a los niños. Desde una perspectiva actual, la función del profesor resulta bastante más compleja que lo era anteriormente. Ahora no basta con mostrar o decir lo que deseamos que aprenda el alumno, sino que se trata más bien de

estructurar y organizar actividades que favorezcan la construcción del conocimiento por parte del niño. Como podemos observar en el modelo de Koehler y Grouws, el comportamiento del profesor depende de múltiples factores (ver Fig. nº 11.3). Efectivamente, este comportamiento es función de su conocimiento de los contenidos matemáticos, de su conocimiento sobre cómo el alumno aprende y comprende estos contenidos, y de su conocimiento de las estrategias instruccionales en torno a estos contenidos específicos. Del mismo modo, las actitudes y creencias del profesor sobre las matemáticas y la enseñanza también van a influir en el comportamiento del profesor.

FIGURA 11.3

MODELO DE KOEHLER Y GROUWS

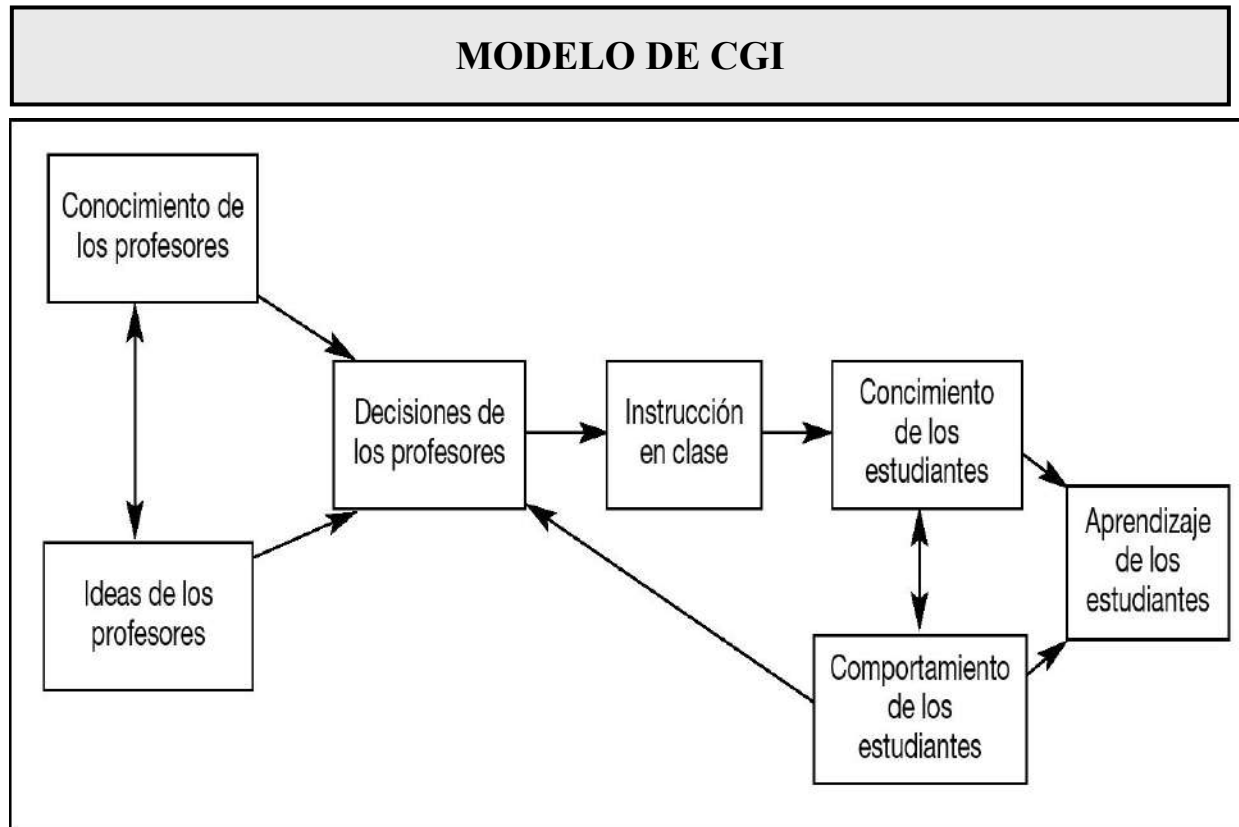


Más en concreto, el profesor toma sus decisiones en clase, según el modelo CGI (Carpenter y Fennema, 1992; Fennema y Franke, 1992), basándose en sus propios conocimientos, sus creencias y en el comportamiento de los alumnos, teniendo especialmente en cuenta cómo los niños aprenden los contenidos específicos (ver Fig. 11.4). En esta línea, el PEIM postula para los docentes una formación psicopedagógica actualizada y un conocimiento exhaustivo del desarrollo-aprendizaje de los contenidos matemáticos específicos. Ahora bien, como el marco teórico más ampliamente aceptado es el constructivismo, la dinámica del aula y el quehacer del profesor debería fundarse al menos en los dos siguientes principios:

- a) Los alumnos construyen sus propios conocimientos matemáticos.

- b) El rol del profesor consiste principalmente en organizar el quehacer del aula de modo que facilite esa construcción.

FIGURA 11.4



En consecuencia, siguiendo de cerca la propuesta del NCTM, las funciones que debería desempeñar en clase el profesor de matemáticas serían principalmente las siguientes:

- a) Presentar actividades que provoquen y desafíen el pensamiento de cada alumno.
- b) Escuchar a los alumnos, pidiéndoles que clarifiquen y justifiquen sus ideas, a veces oralmente, a veces por escrito.
- c) Seleccionar las ideas que merecen mayor profundización en la discusión.

- d) Decidir cómo relacionar el lenguaje y la notación matemática con las ideas de los alumnos.
- e) Finalmente, gestionar las discusiones en clase, animando a veces la participación de los estudiantes.

Para remediar las carencias de formación del profesorado, el PEIM propone la impartición de «**Seminarios**» (ver esquema general del PEIM en [Fig. 11.2](#)) que ofrezcan información fundamental sobre el constructivismo y su aplicación en el aula, así como sobre los desarrollos matemáticos específicos. Ello debe realizarse en un ambiente de debate, a la luz de los resultados aportados por la investigación, y mediante el uso de vídeos que ilustren el comportamiento de los niños en los diferentes niveles de competencia matemática.

En definitiva, la formación del profesorado es amplia y compleja, ya que supone la adquisición de distintos tipos de conocimientos:

- 1) matemáticos,
- 2) pedagógicos,
- 3) sobre el aprendizaje en contenidos matemáticos específicos,
- 4) sobre el contexto específico.

Pero me gustaría resaltar la importancia de conocer al **niño-aprendiendo** cada uno de los contenidos matemáticos concretos, con sus dificultades, estrategias y tipos de errores que suele cometer.

Los Cuestionarios I y II del PEIM (ver [Fig. 11.2](#)) evalúan la formación psicopedagógica y de contenidos específicos de los profesores, pasándolos antes y después de los Seminarios a fin de sopesar la incidencia de estos Seminarios en cada uno de los profesores. Igualmente, el Cuestionario III evalúa las creencias y actitudes de los profesores sobre las matemáticas, ya que existe una compleja relación entre las actitudes, la instrucción y los rendimientos de los escolares. Así mismo, se ha mostrado que es posible cambiar y mejorar las actitudes de los profesores hacia las matemáticas, encontrando que cuando se produce este cambio, cambia igualmente el modo de enseñar y el rendimiento de los alumnos.

11.3.3. Los contenidos: Su selección y secuenciación

La Asociación de Psicólogos Americanos (APA) resalta en 1993 la importancia de los contenidos, los procesos de dominio específico y las estrategias de aprendizaje propias de los diferentes dominios específicos. Efectivamente, estas estrategias de aprendizaje de dominio específico parecen más eficaces que las de dominio general, al menos por tres razones:

- a) porque resulta más complejo relacionar las estrategias generales a tareas de la vida real;
- b) porque los alumnos están más motivados para aprender estrategias de dominio específico, que los relaciona con situaciones concretas de la vida cotidiana escolar;
- c) porque los alumnos que conocen un dominio aprenden las estrategias generales más fácilmente.

La importancia de los contenidos ha sido puesta de manifiesto frecuentemente por diferentes autores. Para el PEIM los contenidos juegan un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje del aula, siendo necesaria su **selección** y **secuenciación**. La selección se refiere:

- a) tanto a las actividades del aula,
- b) como a los contenidos.

En cuanto a las primeras, se recomienda que se centren prioritariamente en la realización de tareas que impliquen comprensión, razonamiento, solución de problemas, representaciones mentales, toma de decisiones, etc., que son relevantes para el desarrollo matemático infantil. En cambio, presentan menos interés otro tipo de actividades mecánicas o memorísticas, que si bien pueden ser útiles, merecen menos tiempo y dedicación, tales como, por ejemplo, los cálculos que se realizan rellenando los espacios vacíos de los algoritmos recogidos en los textos. En cuanto a los contenidos, resulta igualmente importante que sean significativos para los alumnos. Para ello, conviene que estén relacionados:

- a) con la vida cotidiana del niño,
- b) y con sus conocimientos previos.

Un buen ejemplo de lo primero serían los problemas verbales, que los niños se plantean frecuentemente fuera de la escuela:

«Tenía 8 canicas. Ahora tengo 5. ¿Cuántas canicas he perdido?».

En cuanto a la relación con los conocimientos previos, me gustaría insistir en la relevancia de los conocimientos informales que juegan un papel importante y deben tenerse en cuenta en el aula.

Una vez seleccionados los contenidos, el PEIM propone **secuenciarlos** adecuadamente, utilizando como criterio fundamental la dificultad de los mismos para los escolares, ya que, como se ha reiterado a lo largo de las páginas de este libro, el aprendiz constituye el centro del proceso enseñanza-aprendizaje y, por tanto, la enseñanza debe ajustarse al nivel de desarrollo específico del niño (Bermejo y otros, 1998, 2000). Para conocer este nivel de dificultad, el PEIM propone la realización de «Entrevistas individuales» a los niños, a fin de conocer detalladamente los pasos evolutivos que los niños suelen seguir en el aprendizaje de cada uno de los contenidos fundamentales del currículo. Ello facilitará en gran medida el diagnóstico e intervención del profesor a lo largo de la clase.

11.3.4. El contexto del aula: Dinámica constructivista

El aprendizaje escolar puede entenderse como la formación y consecución de objetivos individuales en la realización de actividades colectivas, o como una construcción activa, o como un quehacer colectivo, llevado a cabo en contextos socioculturales. La comunicación y discusión entre los alumnos constituyen el mejor contexto para potenciar no sólo los factores cognitivos, sino también los socioemocionales, facilitando el desarrollo de las ideas matemáticas. De aquí que en múltiples estudios se haya mostrado que el trabajo cooperativo facilita el aprendizaje en general y de los contenidos matemáticos en particular. No obstante, conviene tener en cuenta que la actitud activa del aprendiz en la construcción del conocimiento no tiene por qué manifestarse siempre verbalmente.

En esta misma línea se sitúan tanto lo que los autores denominan «instrucción anclada» como «cognición situada». En ambos casos se trata de

recrear en el contexto formal de aula algunas de las ventajas características del aprendizaje de un oficio, resaltando tanto el carácter interactivo como la participación guiada por el maestro. Cuando los niños aprenden en contextos reales se incrementan su autoconfianza y su actitud activa en el aprendizaje de los conocimientos. Igualmente, cada vez se está insistiendo más en la importancia de las disposiciones para el aprendizaje, de modo que el éxito de éste se debe en gran medida a que los alumnos presenten una disposición positiva en cognición, motivación y afectos.

Con el fin de conocer todos estos factores, el PEIM evalúa el clima sociocontextual del aula mediante la realización de observaciones («Guía de Observación») que investigadores adiestrados llevan a cabo en las clases de matemáticas.

11.4. APLICACIONES DEL PEIM

Para verificar la eficacia del PEIM se seleccionaron cinco clases de 1º de Educación Primaria en colegios del entorno de Madrid. Dos de ellas funcionaron como grupos control y las tres restantes siguieron el Programa a lo largo de todo el curso escolar. Tanto las clases como los profesores se eligieron al azar y en función de la disponibilidad de estos últimos. Abreviando el máximo posible (para más detalles, ver Bermejo y otros, 2002), seguimos los siguientes pasos:

Paso 1º: Una vez seleccionado el curso, nos pareció que la adquisición y comprensión de la suma y resta constituían contenidos fundamentales matemáticos de este curso. Por ello, seleccionamos los diferentes problemas verbales de adición y sustracción como tareas significativas para aprender y enseñar eficazmente estas dos operaciones. Igualmente, mediante una investigación previa, habíamos jerarquizado los problemas verbales en función de la dificultad de los mismos para los escolares, de modo que pudimos ofrecer a los profesores de los grupos experimentales la secuenciación y el orden que deberían seguir en la enseñanza de los mismos en el aula.

Paso 2º: En segundo lugar, evaluamos las competencias matemáticas de cada alumno de las cinco clases al principio del curso con el fin de conocer el punto de partida de cada niño, especialmente de los escolares de los grupos experimentales, que permiten elaborar los «perfiles matemáticos» de los niños del grupo experimental.

Paso 3º: Los profesores pasaron sendos cuestionarios (Cuestionarios I y II) para evaluar sus conocimientos sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos específicos y sobre la perspectiva constructivista y su aplicación en el aula. Posteriormente, los tres profesores de las clases experimentales siguieron unos Seminarios para ofrecerles amplia información sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos seleccionados y la perspectiva constructivista, utilizando vídeos para observar y analizar el comportamiento concreto de los niños en diferentes situaciones de suma y resta. Con el fin de facilitar el conocimiento de los niños y la enseñanza personalizada, cada profesor recibió el «perfil matemático» de cada uno de sus alumnos en estos seminarios. De este modo el profesor tenía un diagnóstico preciso sobre el nivel matemático del niño en ese momento y, en consecuencia, conociendo el paso siguiente en el aprendizaje infantil, podía intervenir de un modo mucho más eficaz en el aula.

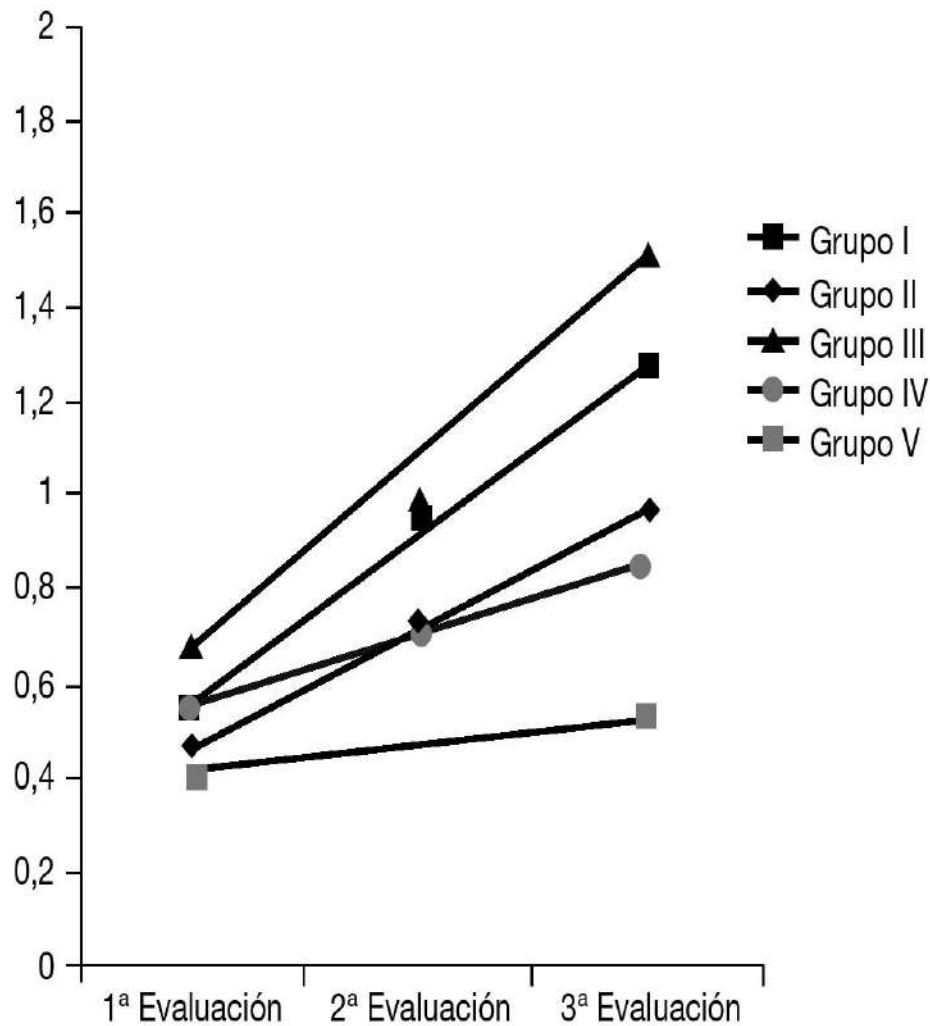
Paso 4º: Para conocer in situ la dinámica de la clase y evaluar hasta qué punto las informaciones ofrecidas en los seminarios se aplicaban en el aula, se llevaron a cabo observaciones concretas en las clases de matemáticas de los grupos experimentales varias veces a lo largo del curso.

Paso 5º: De nuevo, los alumnos de las clases experimentales fueron evaluados sobre sus competencias matemáticas a mitad de curso y al final del mismo, mientras que las dos clases de control fueron evaluadas sólo al final de curso.

Paso 6º: Finalmente, los profesores de las clases experimentales pasaron de nuevo el cuestionario sobre la perspectiva constructivista a fin de verificar su nivel de acuerdo con este marco teórico.

FIGURA 11.5

MEDIDAS GLOBALES DE CADA CLASE: GRUPOS

EXPERIMENTALES: I, II Y III. GRUPOS CONTROL: IV Y V


Los resultados obtenidos muestran, en general, que el PEIM es un programa de intervención eficaz para mejorar el rendimiento matemático de los niños. Efectivamente, la competencia matemática de los escolares de las clases experimentales al final de curso era significativamente superior a la mostrada por los niños del grupo control, cuando al principio de curso estas competencias eran similares y estadísticamente no significativas (ver [Fig. 11.5](#)). Como podemos observar en esta gráfica, todas las clases muestran un cierto aprendizaje a lo largo del año, lo cual resulta lógico y esperable. Pero este aprendizaje es mucho mayor en el caso de las clases experimentales,

especialmente en dos de ellas, tal como puede constatarse en la pendiente de las gráficas.

Por otra parte, estos resultados correlacionan con el nivel de acuerdo de los profesores con la perspectiva constructivista y con sus conocimientos sobre el desarrollo de los contenidos matemáticos enseñados a lo largo del curso, de modo que cuanto más alto era el nivel de acuerdo, mejores eran las puntuaciones obtenidas por sus alumnos en matemáticas. Por tanto, parece existir una cierta relación entre la formación o el tipo de formación del profesorado y los rendimientos obtenidos por sus alumnos.

11.5. BIBLIOGRAFÍA

- Bermejo, V. (1996). «Enseñar a comprender las matemáticas». En J. Beltrán y C. Genovard (Eds.), *Psicología de la instrucción* Vol. I (pp. 571-594). Madrid: Síntesis.
- Bermejo, V. y otros (1998). «Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad». *Revista de Psicología General y Aplicada*, 51(3-4), 533-552.
- Bermejo, V. y otros (2000). «Las creencias de los alumnos y profesores sobre las matemáticas». En J. A. Beltra, V. Bermejo, L. Pérez, M. D. Prieto, D. Vence y R. González (Eds.), *Intervención psicopedagógica y currículo escolar* (pp. 129-152). Madrid: Pirámide.
- Bermejo y otros (2002). *PEI. Un programa de intervención para la mejora del rendimiento matemático*. Madrid: Ed. Complutense.
- Carpenter, T. y Fennema, E. (1992). «Cognitively guided instruction: building on the knowledge of students and teachers». *International Journal of Research in Education*, 17, 457-470.
- Fennema, E. y Franke, M. L. (1992). «Teachers' knowledge and its impact». En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan Publishing Company.

- Fosnot, C. (Ed.) (1996). *Constructivism: Theory, perspectives, and practice*. NY: Teachers College Press.
- Koehler, M. S. y Grouws, D. A. (1992). «Mathematics teaching practices and their effects». En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 115-126). NY: MacMillan.
- Lampert, M. y McCombs, B. L. (Eds.) (1998). *How students learn. Reforming schools through learner-centered education*. Washington, D.C.: A.P.A.
- Saxe, G. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Saxe, G. y Guberman, S. R. (1998). «Studying mathematics learning in collective activity». *Learning and Instruction*, 8, 489-501.